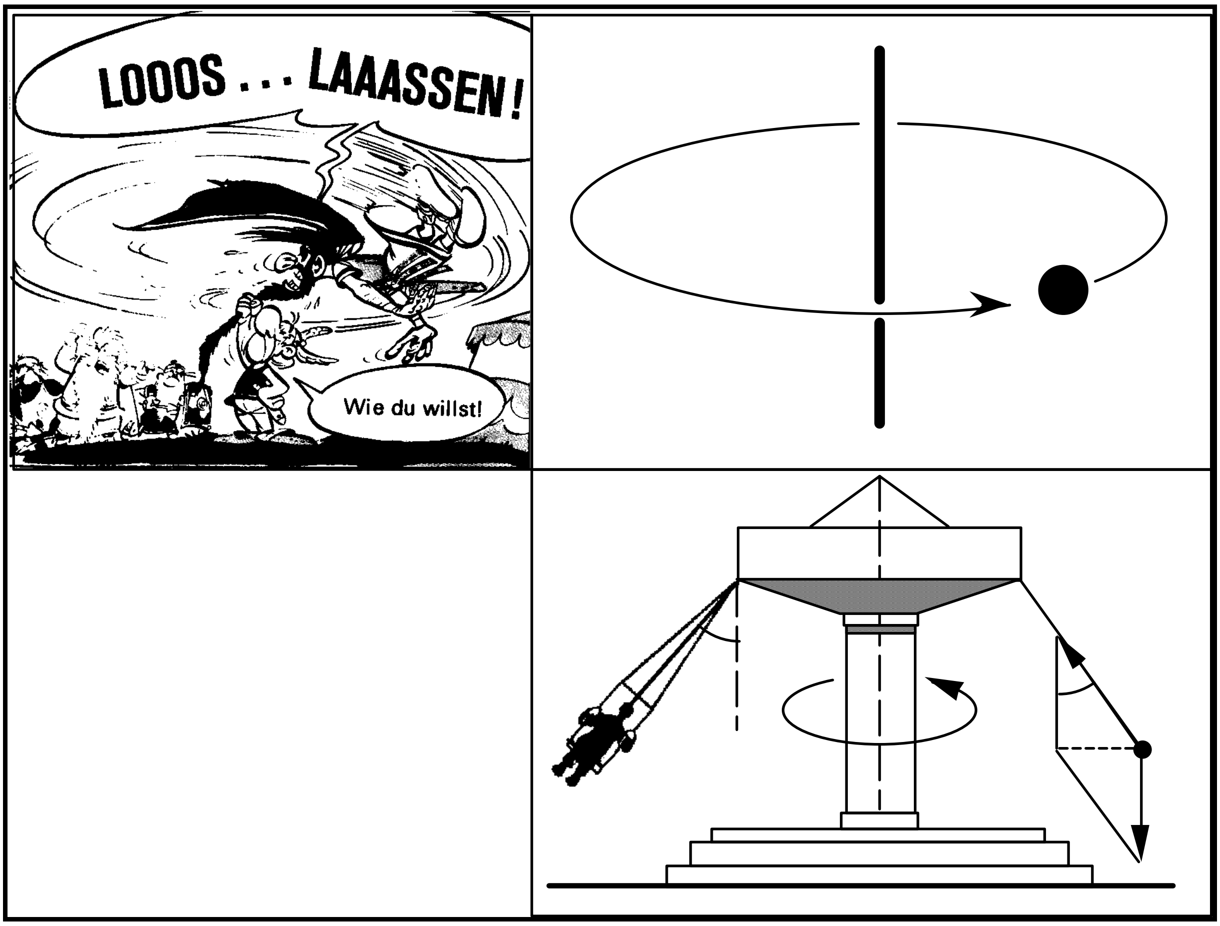
Eidgenössische
Technische Hochschule
Zürich

Institut für Verhaltenswissenschaft und Departement Physik

Kreisbewegung



Ein Leitprogramm zur Mechanik

Verfasst von
Claudio Burkhard, Hans-Ruedi Deller,
Heinz Isliker, Niklaus Schneeberger,
Christoph Stamm, Werner Vogel

Herausgegeben durch Hans Peter Dreyer

ETH-Leitprogramm Physik:

„Kreisbewegung„

Version
Mai 2002, Überarbeitung von Robert Stürtz (Gymnasium Horkesgath Krefeld)

Schulbereich
Gymnasien

Fachliche Vorkenntnisse
Grundlagen der Kinematik und der Dynamik, Energiesatz

Bearbeitungsdauer
8-10 Lektionen

Die *ETH-Leitprogramme* sind ein Gemeinschaftsprojekt von Karl Frey und Angela Frey-Eiling (Initiatoren) zusammen mit den Autorinnen und Autoren.

Das Projekt *ETH-Leitprogramme* wurde durch die ETH Zürich finanziell unterstützt.

Vorwort

Zur ersten Version dieses Leitprogrammes erstellten 1992 HR. Deller, H. Isliker, N. Schneeberger, Ch. Stamm G. Wider und meine Wenigkeit je ein Kapitel. Nach zwei Erprobungen mit schriftlicher Evaluation unterzog Claudio Burkhard 1993 das Material einer gründlichen Überarbeitung und Kürzung. Bei seiner grossen Arbeit konnte er sich einerseits auf seine eigene Erfahrung bei der Erprobung, andererseits auf die präzisen Verbesserungsvorschläge von Emil Wiesendanger abstützen.

Ihnen allen, die bei der Erarbeitung dieses Leitprogrammes mitgewirkt haben, danke ich ganz herzlich. In diesen Dank einschliessen möchte ich auch einige Kolleginnen und Kollegen und die zahlreichen Schülerinnen und Schüler, die mit ihren Meinungsäusserungen nach den zahlreichen Erprobungen zu verschiedenen Verbesserungen beigetragen haben.

Literargymnasium Rämibühl Zürich, August 1995 W. Vogel

Einführung

Die Erde dreht sich und alles, was auf der Erde steht oder liegt, dreht sich mit. Wir alle drehen auf einer riesigen Kreisbahn in einem Tag einmal rundum. Kreisbewegungen in überaus vielfältiger Art können wir auf dem Chilbiplatz beobachten und erleben. Im Riesenrad, auf dem Karussell und beim Looping der Achterbahn bewegen wir uns auf einer Kreisbahn. Aber auch auf der Strasse begegnen wir dieser Bewegung. Auch wenn wir mit dem Auto, Motorrad oder Fahrrad einen Kreisel nur bis zur nächsten Abzweigung befahren, gelten dabei doch die Gesetze der Kreisbewegung.

Diese Gesetze werden Sie mit Hilfe des vorliegenden Leitprogrammes lernen. Im ersten Teil geht es um die Beschreibung der Bewegung. Sie werden dabei Ihre Kenntnisse von den geradlinigen Bewegungen anwenden können und zudem einige neue Begriffe und Grössen kennen lernen. Die Frage, warum ein Körper eine Kreisbahn beschreibt, wird im zweiten Kapitel bearbeitet, wobei die bekannten Newton-Gesetze zur Anwendung kommen. Auf dieser Grundlage werden Sie in den nachfolgenden beiden Kapitel die Kräfte bei verschiedenen Beispielen untersuchen und dabei wohl auch einige der auf der "Chilbi" erlebten Erscheinungen erklären können. Mit den Empfindungen, die man als Mitfahrer bei einer Kreisbewegung verspürt, beschäftigt sich schliesslich das letzte Kapitel, das jedoch nicht mehr zum obligatorischen Stoff gehört. Dieses sogenannte Additum können Sie in Angriff nehmen, wenn Sie die ersten vier Kapitel zügig bearbeitet haben.

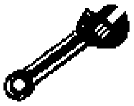
Inhaltsverzeichnis

Anhänge

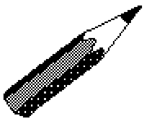
Arbeitsanleitung

Sie werden hauptsächlich selbständig arbeiten. Damit Sie dabei auch wirklich zum gesteckten Ziel gelangen, werden Sie von diesem Leitprogramm geführt, durch die verschiedenen Lernetappen geleitet.

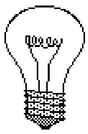
Nach einer Übersicht sind in jedem Kapitel die Lernziele formuliert. Dann arbeiten Sie den Stoff durch. Dabei weisen die nachfolgenden Zeichen Sie auf bestimmte Tätigkeiten hin.



Dieses Symbol zeigt Ihnen, dass Sie nun ein **Experiment** oder ein Gedankenexperiment durchführen müssen.



Hier bekommen Sie Gelegenheit, mit einer **Kontrollfrage** oder einer **Aufgabe** zu überprüfen, ob Sie den letzten Abschnitt verstanden haben. Sie können auch selber kontrollieren, ob Sie zur richtigen Lösung gelangt sind, denn diese finden Sie jeweils am Schluss des betreffenden Kapitels. Dort bekommen Sie auch gewisse Hilfen, falls Sie nicht die richtige Lösung gefunden haben.



Das Leitprogramm ist ein Arbeitsinstrument, das Sie durch den Lernprozess hindurch führt. Es ist dagegen ungeeignet, um den Stoff - zum Beispiel vor der nächsten Prüfung - nochmals zu repetieren. Erstellen Sie deshalb in Ihrem Theorieheft jeweils eine **Zusammenfassung**, wenn das nebenstehende Zeichen erscheint. Sie soll das enthalten, was Sie sich für die nächste Prüfung merken und einprägen müssen. Sie darf nicht zu umfangreich sein, sich aber auch nicht auf eine reine Formelsammlung beschränken. Falls Sie die Lernkontrolle am Ende des Kapitels mit Hilfe Ihrer Zusammenfassung erfolgreich bestehen, hat sie ihren Zweck erfüllt.

Wenn Sie die Aufgaben und Lernkontrollen erfolgreich bearbeitet haben, melden Sie sich am Schluss von jedem Kapitel beim Lehrer zu einem Kapiteltest. Dabei geht es in erster Linie darum, zu überprüfen, ob Sie genügend sattelfest sind, um das nächste Kapitel in Angriff zu nehmen.

Nun wollen wir aber beginnen. Wir sehen uns erst beim Test. Denn nur wenn Sie sich völlig in die Sackgasse gedrängt fühlen, sollen Sie bei mir Hilfe holen.

Beschreibung der Kreisbewegung

Übersicht

"Wie kann man eine Bewegung auf einer Kreisbahn am besten beschreiben?"
In diesem Kapitel werden Sie auf diese Frage eine Antwort finden. Dabei werden Sie alle wichtigen Begriffe zur Beschreibung einer Kreisbewegung kennenlernen.

Was wissen Sie jetzt schon?
Vieles wird Repetition aus anderen Fächern sein: So wissen Sie schon, was ein Kreis ist. Sie wissen, dass die Grösse eines Kreises am einfachsten durch seinen Radius beschrieben wird. Sie wissen auch, was eine Bewegung auf einer Geraden ist und wie man sie mathematisch beschreibt.

Was werden wir tun?
Wir werden Wissen aus Ihrem Mathematikunterricht mit Wissen aus Ihrem Physikunterricht kombinieren und damit einige neue Begriffe definieren. Dabei lernen Sie ein neues und praktisches Winkelmass und ein der Kreisbewegung angepasstes Koordinatensystem kennen. Verschiedene Grössen zur Charakterisierung einer Kreisbewegung sind miteinander durch einfache Formeln verknüpft. Wir werden diese Formeln herleiten. Alle neuen Begriffe werden Sie an praktischen Beispielen einüben. Eine Bewegung zu beschreiben heisst zu sagen, an welchem Ort und zu welcher Zeit ein Körper ist. Sie werden erfahren, wie das für die Kreisbewegung am einfachsten geht.

Warum machen wir das?

Mit diesen neuen Begriffen wird es dann viel einfacher sein, über die Kreisbewegung zu sprechen und sie mathematisch zu beschreiben. Sie werden die Begriffe, die Ihnen in diesem Kapitel erklärt werden, im ganzen Leitprogramm immer wieder antreffen. Es lohnt sich also, sich diese Begriffe zu merken.

Wie gehen wir vor?

Sie sollten einige Bogen Papier, Schreibwerkzeug, einen Maßstab, einen Zirkel, Ihre Formelsammlung und den Taschenrechner mit der Anleitung dazu bereit halten.

Sie arbeiten für sich, bis Sie aufgefordert werden, mit einem Kollegen oder einer Kollegin zu diskutieren.

Lernziele für Kapitel 1

- Sie wissen, wie man eine Kreisbewegung einfach beschreiben kann.
- Sie können alle mit (*) bezeichneten Definitionen und Formeln auswendig, und Sie können sie auf konkrete Probleme anwenden.

Der Startschuss ist gefallen, Sie können mit dem Stoff beginnen:

Es ist möglich, dass Ihnen das Thema des folgenden Abschnittes über das Bogenmass aus der Mathematik schon gut bekannt ist. Dann lösen Sie aus diesem Abschnitt nur die Aufgabe 1.1 (Lösungen zu den Aufgaben finden Sie jeweils am Ende des Kapitels.) Bereitet Ihnen diese Aufgabe keine Schwierigkeiten, dann können Sie den Abschnitt über das Bogenmass überspringen. Wenn Sie sich nicht so ganz sattelfest fühlen, so arbeiten Sie den Abschnitt über das Bogenmass von Anfang an durch.

1.1 Das Bogenmass

Aus der Mathematik kennen Sie vielleicht das Bogenmass bereits. Wie wir am Schluss dieses Abschnittes sehen werden, ist das Bogenmass eine für die Physik besonders praktische Art, die Grösse von Winkeln anzugeben. Die willkürliche Einteilung eines vollen Winkels in 360° fällt weg. Dies wird uns die Arbeit sehr erleichtern.

Dieses Kapitel enthält eine kurze Repetition der wichtigsten Begriffe.

Der Winkel α wird im Bogenmass als Verhältnis der zu ihm gehörenden Grössen von Kreisbogen b und Kreisradius r angegeben: $\alpha = \frac{b}{r}$

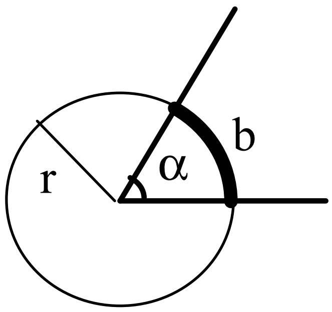


Fig. 1.1

Die Länge des Kreisbogens kann man mit einem einfachen Dreisatz berechnen. Der Bogen über einem 60° Winkel z.B. ist des vollen Umfanges U, da 6·60° = 360°. Die allgemeine Formel für den Kreisbogen b, welcher den Winkel α in Grad einschliesst, ist:

$$b = U \cdot \frac{\alpha}{360} = 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360}$$

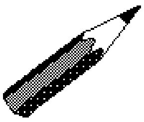
Division durch r: $\frac{b}{r} = \frac{2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360}}{r} = 2\pi \cdot \frac{\alpha}{360}$

Diese Zahl hängt nur vom Winkel α ab! Der Radius des Kreises kürzt sich heraus. Dieses Verhältnis gibt den Winkel im **Bogenmass** an. Das Bogenmass ist der Quotient aus zwei Strecken und hat keine Einheit.

Damit man erkennt, dass es sich um einen Winkel handelt, benutzt man die Bezeichnung **Radiant** oder abgekürzt "rad". Bei Dimensionsbetrachtungen (überprüfen der Einheiten) kann die Bezeichnung Radiant weggelassen werden. Das Wort "Radiant" wird nur hinzugefügt, um ganz klar zu kennzeichnen, dass es sich um einem Winkel im Bogenmass handelt und man nicht einfach das "°"-Zeichen vergessen hat.

Beispiel: Der 60°-Winkel ist im Bogenmass ausgedrückt:

$$\frac{b}{r} = \frac{2\pi r \cdot \frac{60}{360}}{r} = 2\pi \cdot \frac{60}{360} = \frac{\pi}{3} = 1{,}047\,rad$$



Aufgabe 1.1: "Das Bogenmass"
Rechnen Sie die Winkel α= 90°, α= 45°, α= 37° in das Bogenmass um. Wie rechnet man allgemein einen Winkel im Bogenmass aus? Lesen Sie nun folgende Definition und vergleiche sie mit Ihrer Antwort.

Definition **Ein Winkel α im Bogenmass ist definiert als das Verhältnis des dazugehörenden Kreisbogens zum Radius des Kreises:**

(*1.1)

$$\alpha = \frac{b}{r}\,, \quad [\alpha] = \mathbf{rad}$$

Das Bogenmass hat keine Einheit. Ihr wird die Bezeichnung Radiant (abgekürzt "rad") zugefügt.

Diese Definition sollten Sie sinngemäss auswendig können (darum steht ein Stern vor der Nummer).

Allgemein rechnet man den Winkel α mit folgender Formel ins Bogenmass um:

(*1.2)

$$\alpha\,[\mathrm{rad}] = \pi \cdot \frac{\alpha[^0]}{180^0}$$

Die Formel kann so umgeformt werden, dass man aus einem Winkel im Bogenmass [rad] einen Winkel in Graden [°] bekommt:

(1.3)

$$\alpha\,[°] = 180° \cdot \frac{\alpha[rad]}{\pi}$$

Diese beiden Formeln können Sie auch selbst herleiten. Versuchen Sie es!
(Sollte es Ihnen nicht gelingen, so bearbeiten Sie den Stoff in diesem Kapitel noch einmal.)

Sie fragen sich vielleicht, was das Ganze soll. Was ist der Vorteil, wenn wir im Bogenmass arbeiten?
Wie Sie aus der Definition (*1.1) sofort herleiten können, lässt sich ein Kreisbogen sehr einfach berechnen, wenn der dazugehörige Winkel im Bogenmass gegeben ist:

(1.4)

$$b = r \cdot \alpha\,[\mathrm{rad}]$$

Alle Dreisatzrechnungen mit π fallen weg! Weitere Vorteile sehen Sie später in diesem Leitprogramm.

1.2 Die Polarkoordinaten

Achtung: Diesen Abschnitt müssen Sie nur bearbeiten, wenn Sie den Begriff "Polarkoordinaten" nicht schon aus der Mathematik kennen.

Sie lernen hier ein Koordinatensystem kennen, in dem eine Kreisbewegung einfach zu beschreiben ist. Sie werden kartesische Koordinaten in dieses praktischere System umrechnen können.

Das Kartesische Koordinatensystem ist Ihnen bekannt. Einem Punkt in der Ebene werden die Koordinaten (x,y) zugeordnet.

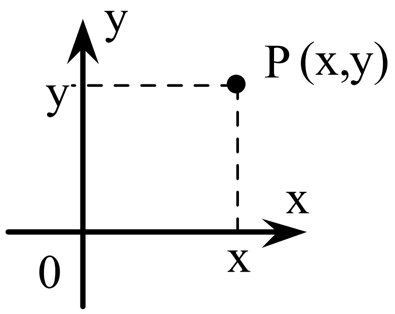


Fig. 1.2

Dies ist jedoch nicht die einzige Möglichkeit die Lage des Punktes zu beschreiben. Gibt man den Radius r (Abstand vom Ursprung) und den Polarwinkel φ (Winkel zwischen den Strecke OP und der x-Achse) an so ist die Lage des Punktes P auch eindeutig festgelegt.

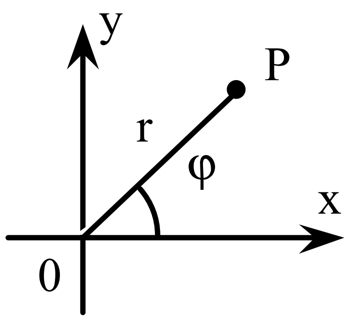


Fig. 1.3

Das Wertepaar r und φ bezeichnet die Lage des Punktes P in Polarkoordinaten.

Beachten Sie, dass bei zwei Dimensionen stets zwei Koordinaten erforderlich sind, entweder x und y oder r und φ.

Die kartesische Koordinaten lassen sich in Polarkoordinaten umrechnen (und umgekehrt).
Die Beziehungen finden Sie in der DMK/DPK-Formelsammlung S. 81. Falls Sie sich darin etwas üben wollen, ermitteln Sie aus $x = 4$ und $y = 3$ die Polarkoordinaten r und φ, und berechnen Sie danach mit den Resultaten wiederum x und y.

1.3 Begriffe zur Kreisbewegung

Die Bewegungen, die Sie bis jetzt im Physikunterricht kennengelernt haben, waren alles Bewegungen auf einer Geraden, also lineare Bewegungen. Jetzt wollen wir Bewegungen auf einer Kreisbahn betrachten. Wir werden einige neue Begriffe definieren. Dabei nutzen wir unsere Kenntnisse von der linearen Bewegung und über das *Bogenmass*.

Zur Erinnerung:
Eine lineare Bewegung eines Körpers heisst **gleichförmig**, wenn in gleichen, beliebig kleinen Zeitabschnitten gleiche Wegabschnitte zurückgelegt werden. Dabei wird das Verhältnis der Verschiebung zur benötigten Zeit als Geschwindigkeit definiert:

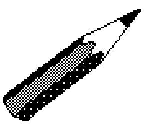
$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

(Falls Ihnen dies nicht mehr völlig klar ist, so studieren Sie zuerst den Stoff über die lineare gleichförmige Bewegung in Ihrem Physikheft oder -Buch, bevor Sie weiterfahren)

Diese Definition übertragen wir jetzt auf die ***gleichförmige*** **Kreisbewegung**:

(*1.5) **Eine Kreisbewegung heisst *gleichförmig*, falls in gleichen Zeitabschnitten gleiche Winkel überstrichen werden.**

Der Radius wird bei der Kreisbewegung konstant gehalten.



Aufgabe 1.2.: "Die gleichförmige Kreisbewegung"
Überlegen Sie, wo im Alltag gleichförmige Kreisbewegungen vorkommen (mindestens 3 Situationen). Notieren Sie Ihre Ideen auf ein Blatt Papier und überprüfen Sie bei jedem Fall, ob die Definition der gleichförmigen Kreisbewegung auch zutrifft.

Analog zur Geschwindigkeit können wir eine Winkelgeschwindigkeit definieren:

Definition **Die *Winkelgeschwindigkeit* ω ist das Verhältnis des überstrichenen Winkels $\Delta\varphi$ zur dabei verflossenen Zeit Δt:**

(*1.6)
$$\omega = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$$

Die Winkelgeschwindigkeit ω ("omega") nennt man auch *Kreisfrequenz.*

Den Winkel φ messen wir **immer** im Bogenmass.

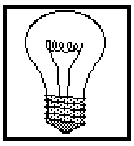
(*) Somit ist die Einheit der Winkelgeschwindigkeit oder Kreisfrequenz .

(Falls rad weggelassen wird, ist die Einheit **oder s^{-1}.**)

Bemerkungen:
Nach der Definition der ***gleichförmigen*** *Kreisbewegung* werden in gleichen Zeiten gleiche Winkel überstrichen. Es spielt also keine Rolle, in welchem Zeitintervall Δt wir den überstrichenen Winkel $\Delta\varphi$ messen. Das Verhältnis $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ ist eine **Konstante**.

Wir können darum die **gleichförmige Kreisbewegung** auch so definieren:

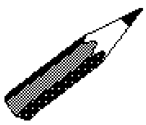
(1.7) **Eine Kreisbewegung heisst *gleichförmig*, falls die Winkelgeschwindigkeit ω konstant ist.**



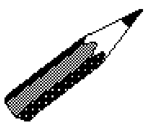
Machen wir eine kurze "Verschnaufpause" auf unserer Wanderung. Blicken wir kurz zurück. Folgende Begriffe sollten Ihnen etwas sagen:
- Bogenmass
- Polarkoordinaten
- gleichförmige Kreisbewegung
- Winkelgeschwindigkeit

Prüfen Sie sich ehrlich. Könnten Sie jemandem die Begriffe erklären? Machen Sie ein paar Gedanken, wie Sie das tun würden. Wenn Sie in einem Thema unsicher sind, so lesen Sie die entsprechende Stelle in diesem Leitprogramm nochmals durch.

*(Wenn Sie Mühe haben, die folgenden beiden Aufgaben 1.3 und 1.4 sicher zu lösen, so gehen Sie den Abschnitt 1.1 über das **Bogenmass** nochmals durch, bevor Sie den Abschnitt 1.3 über die **Begriffe zur Kreisbewegung** wiederholen.)*



Aufgabe 1.3: "Die Winkelgeschwindigkeit"
Wie gross ist die Winkelgeschwindigkeit ω, wenn man für einen Umlauf auf einer Kreisbahn 2 s braucht?



Aufgabe 1.4: "Die Winkeländerung"
Die Winkelgeschwindigkeit ω beträgt $\frac{\pi}{4}$ (rad/s)

a) Welcher Winkel wird in 6 s überstrichen?
b) Wie gross ist dieser Winkel in Graden ausgedrückt?

Aufgabe 1.3 lässt sich verallgemeinern, wenn man den Begriff der **Umlaufszeit** einführt:

(*1.8) **Die Zeit für einen Umlauf auf einer Kreisbahn nennt man *Umlaufszeit* oder *Periode*. Man verwendet für sie das Formelzeichen T. Die Einheit von T ist die Sekunde.**

Allgemeiner formuliert lautet Aufgabe 1.3 nun so:
Wie gross ist die Winkelgeschwindigkeit ω, wenn die Umlaufszeit T bekannt ist?
Bei einem Umlauf beträgt der überstrichene Winkel Δφ gerade 2π. Für diesen Umlauf braucht man die Zeit Δt = T (T = Periode). Daraus lässt sich die Winkelgeschwindigkeit berechnen:

(*1.9)
$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = 2\pi / T$$

Aufgabe 1.5: "Die Erdrotation"
Die Erde dreht sich in 24 Stunden einmal um die eigene Achse. Also gilt T = 24 h. Berechnen Sie die Winkelgeschwindigkeit ω der Erdrotation.
Wie lautet der Zusammenhang zwischen ω und T? Wenn Sie sich nicht erinnern können, versuchen Sie, es durch Überlegen zu rekonstruieren!

Aufgabe 1.6: "Das schnelle Rad"
Die Umlaufszeit T eines Rades betrage 0.02 s. Wievielmal dreht sich das Rad pro Sekunde?

Auch diese Aufgabe lässt sich verallgemeinern:
Ein **periodischer** Vorgang ist ein Vorgang, der sich nach einer gewissen Zeit (*Perioden-dauer*) wiederholt. Das Drehen eines Rades, das Drehen der Erde, jede *gleichförmige Kreisbewegung* ist ein periodischer Vorgang: Nach der *Periode T* ist der rotierende Körper wieder in der ursprünglichen Lage. Zählt man nun, wievielmal sich ein periodischer Vorgang pro Sekunde wiederholt, so ergibt dies die **Frequenz f**. (Verwechseln Sie die *Kreisfrequenz* ω nicht mit der *Frequenz f!*)
Die Frequenz f des Rades von Aufgabe 1.6 beträgt also 50 . Das heisst, das Rad dreht sich 50 mal pro Sekunde.

Ein anderes Beispiel: Wenn Sie sich körperlich etwas anstrengen, schlägt Ihr Herz etwa 120 mal pro Minute. Dies entspricht einer Herzfrequenz von 2 , da der periodische Vorgang des Herzschlages sich zweimal pro Sekunde wiederholt. Die Einheit der **Frequenz** ist oder s^{-1}. Oft wird dafür auch eine spezielle Einheit angegeben um anzuzeigen, dass es sich um eine Frequenz handelt. Die Einheit heisst **Hertz** (abgekürzt **Hz**) zu Ehren des Physikers Heinrich Hertz (1857 - 1894). Die Einheit Hertz hat also nichts mit dem Herzschlag zu tun!

(*1.10) **Das Verhältnis der Anzahl (Umläufe, Perioden) zum Zeitintervall nennt man *Frequenz* f.**
Die Einheit der Frequenz ist *Hertz (Hz)* : 1 Hz = 1 s^{-1}.

Bei Maschinen und Motoren wird oft anstelle der Frequenz die "Tourenzahl" in der Einheit "Umläufe pro Minute" = angegeben.

Wenn man Aufgabe 1.6 verallgemeinert, so lautet die Frage nun: Wie ist der Zusammenhang zwischen Periode T und Frequenz f einer Kreisbewegung (eines periodischen Vorgangs)?

Die Antwort sollten Sie sich merken:

(*1.11) $$f = \frac{1}{T}$$

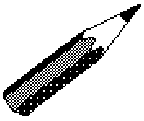
Erinnern Sie sich an den Zusammenhang zwischen der Winkelgeschwindigkeit ω und der Periode T?

Formel 1.9 lautete: $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi\dfrac{1}{T} = 2\pi f$

Die *Frequenz* f und die *Winkelgeschwindigkeit* ω unterscheiden sich um einen Faktor 2π! Von diesem Zusammenhang kommt auch der etwas merkwürdige Name *Kreisfrequenz* für die Winkelgeschwindigkeit ω.

Den Zusammenhang zwischen ω, T und f sollten Sie sich merken:

(*1.12) $$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$



Aufgabe 1.7: "Der Getriebeschaden"

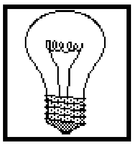
Ein Ton besteht aus periodischen Luftdruckschwankungen. Unser Ohr nimmt diese Druckschwankungen auf, das Hirn stuft den Ton als hoch oder tief ein, je nach *Frequenz* der periodischen Druckschwankung. Ein hoher Ton (z.B. 10000 Hz) hat die grössere Frequenz als ein tiefer Ton (z.B. 60 Hz). Der Kammerton (a') hat die Frequenz von 440 Hz.

In einem defekten Getriebe stösst nun ein Zahnrad bei jeder Umdrehung an und erzeugt somit eine periodische Druckschwankung, die wir als 200 Hz Ton wahrnehmen.

a) Berechnen Sie die Winkelgeschwindigkeit ω des Zahnrades.

b) Berechnen Sie die Periode T des Zahnrades.

Wenn Ihnen diese Aufgabe Mühe bereitete, sollten Sie zu Aufgabe 1.3 zurückkehren und den Stoff bis hierhin nochmals durcharbeiten.



Sie haben jetzt einige neue Begriffe kennengelernt:
- Winkelgeschwindigkeit (Kreisfrequenz) ω,
- Periode T ,
- Frequenz f.

Versteht man die Bedeutung dieser Begriffe, so sind die Beziehungen unter den verschiedenen Grössen mit Überlegungen zu "rekonstruieren". Praktisch ist es, wenn man sie auswendig kennt.

Nehmen Sie nun Ihre Formelsammlung zur Hand und schauen Sie nach, was zu den entsprechenden Grössen und ihren Beziehungen steht. Versuchen Sie sich dabei die Begriffe einzuprägen!

1.4 Die Bewegung auf dem Kreis

Im letzten Abschnitt dieses Kapitels geht es darum, die Bewegung auf dem Kreis zu beschreiben. Wir wollen die Geschwindigkeit und die Koordinaten eines Körpers auf einer Kreisbahn berechnen. Wir nutzen dabei unsere Kenntnisse über *Bogenmass* und *Winkelgeschwindigkeit*. Wie praktisch die Grösse *Winkelgeschwindigkeit* ist, zeigt sich, wenn wir die Bahngeschwindigkeit berechnen wollen: Was ist die Bahngeschwindigkeit?

Ein Beispiel:

Sie fahren mit dem Fahrrad im Kreis herum. Die Bahngeschwindigkeit ist die Geschwindigkeit, die Ihnen Ihr Tachometer anzeigt.

Etwas mathematischer:

Wenn wir uns auf einer Kreisbahn bewegen, so legen wir in einer Zeit Δt den Bogen Δb zurück.

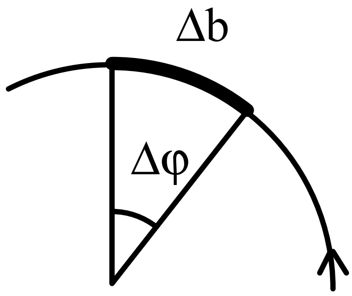


Fig. 1.4

Die Bahngeschwindigkeit ist somit: $v = \dfrac{\Delta b}{\Delta t}$

Bei gleichförmiger Bewegung kann der Spezialfall einer vollen Umdrehung betrachtet werden. Es gilt dann: $\Delta b = 2\pi\, r$ und $\Delta t = T$.

Somit ist $$v = \frac{\Delta b}{\Delta t} = 2\pi \cdot r \,/\, T = \omega \cdot r$$

Dabei wurde im letzten Schritt Formel (1.9) verwendet.

Merken Sie sich diese Formel:

(*1.13) Bahngeschwindigkeit: $v = \omega \cdot r$

Bemerkung:

Bei der *gleichförmigen Kreisbewegung* ist ω konstant. Also ist hier auch die *Bahngeschwindigkeit* konstant. (Auf einer Kreisbahn ändert sich r nicht!)

Aufgabe 1.8: "Der Töfffahrer (<u>Motorradfahrer)</u>"

Ein Töff fährt auf einer kreisförmigen Teststrecke mit 100 km/h. Der Kreisradius beträgt 160 m.

a) Berechnen Sie die Winkelgeschwindigkeit ω.

b) Wie lange braucht der Töfffahrer, um ein Viertel der Runde zu fahren? (Berechnen Sie dies, ohne den Kreisumfang zu berechnen, rechnen Sie mit ω!)

c) Sind die 100 km/h eine grosse Geschwindigkeit für die Kurve auf der Kreisbahn? Was denken Sie?

Sie wissen jetzt, wie Sie aus der *Winkelgeschwindigkeit* ω die *Bahngeschwindigkeit v* berechnen. Um die Kreisbewegung jedoch genauer zu beschreiben, sollten wir auch angeben können, wo sich ein Körper auf einer Kreisbahn zu irgendeiner Zeit befindet. Am einfachsten ist das Problem zu lösen, wenn man in *Polarkoordinaten* arbeitet. Wir wollen dazu folgende Aufgabe lösen:

Aufgabe 1.9: "Das Karussell"

Ein Karussell mit verschiedenen Figuren bewegt sich gleichförmig mit der Winkelgeschwindigkeit ω.

a) Mit welcher Winkelgeschwindigkeit bewegen sich die folgenden beiden Pferdchen:

- das schwarze, das sich zuinnerst nahe der Achse befindet?
- das weisse, das sich zuäusserst auf dem Karussell befindet?

b) Wo befindet sich das weisse Pferdchen zu einem beliebigen Zeitpunkt t, wenn es im Zeitpunkt $t_o = 0$ s im Abstand r_o von der Drehachse ist und den Anfangswinkel φ_o hat?

Hinweis: Der überstrichene Winkel nach einer beliebigen Zeit t ist $\varphi = \omega\, t$ (Analog zur linearen Bewegung $s = v\, t$). Vergessen Sie das φ_o nicht! (φ_o ist die analoge Grösse zu s_o in der Formel $s = s_o + v\, t$.)

c) (fakultativ) Wie lautet die Lösung von a), falls der Zeitpunkt t_o nicht einfach 0 s (Null) ist, sondern ganz allgemein als t_o gegeben ist?

Folgende Aufgabe sollten Sie lösen können, ohne oben Formeln nachzusehen. Sie repetieren dabei die Zusammenhänge zwischen *Frequenz, Winkelgeschwindigkeit, Periode* und *Bahngeschwindigkeit*. Gelingt es Ihnen noch nicht, so schreiben Sie sich die nachgeschlagenen Formeln auf ein Blatt und versuchen Sie, sie sich einzuprägen.

Aufgabe 1.10: "Das Rennen auf dem Karussell"

Das oben beschriebene Karussell dreht sich mit der Frequenz 0.1 Hz.

Zwei Pferde, die nebeneinander stehen, haben die Abstände von r = 4 m und r = 5.5 m von der Drehachse.

a) Wie gross ist die Umlaufzeit T?

b) Wie gross ist die Differenz der Bahngeschwindigkeiten der beiden Pferde?

In diesem Kapitel haben Sie folgende Begriffe und Methoden kennengelernt:

- Bogenmass
- Polarkoordinaten (r,φ)
- Winkelgeschwindigkeit (Kreisfrequenz) ω
- Umlaufszeit (Periodendauer) T
- Frequenz f
- Beziehungen zwischen ω, T, f
- Bahngeschwindigkeit v
- Beschreibung einer gleichförmigen Kreisbewegung

Versuchen Sie nun, diese Begriffe und Methoden für sich zu repetieren. Sie sollten nachher in der Lage sein, sie jemandem zu erklären. Halten Sie sich beim Repetieren strikt an folgende Spielregeln. Sie erleichtern Ihnen das Lernen:

1) Versuchen Sie, sich selbst zu erinnern. Blättern Sie nicht zurück!
2) Haben Sie etwas vergessen, so schreiben Sie sich eine präzis formulierte Frage auf ein Blatt Papier. Etwa "Wie lautet der Zusammenhang zwischen der Frequenz f und der Winkelgeschwindigkeit ω?"
3) Kommt Ihnen die Antwort immer noch nicht in den Sinn, so dürfen Sie die Antwort nachschlagen. Schauen Sie nicht mehr nach, als Sie für die Beantwortung der Frage unbedingt brauchen.
4) Sobald Sie die Antwort gefunden haben, sollten Sie wieder diese Seite aufschlagen. Notieren Sie nun die gefundene Antwort unter Ihre gestellte Frage.
5) Wenn Sie durch alle Begriffe durchgegangen sind, schauen Sie sich Ihr "Frage-Antwortblatt" nochmals durch.
6) Notieren Sie sich die Zusammenfassung ins Theorieheft.

Mit den folgenden Aufgaben können Sie prüfen, ob Sie dieses Kapitel verstanden haben und die wichtigsten Formeln auswendig kennen. Wenn Sie die folgenden drei Aufgaben richtig beantworten können ohne vorne nachzusehen, ist das Fundament für die weiteren Kapitel dieses Leitprogrammes gelegt. Sie werden nun in der Lage sein, das Kapitel 2 zu verstehen. Die Lösungen finden Sie wie immer am Ende des Kapitels. Gelingt es Ihnen nicht, die Fragen zu beantworten, so befolgen Sie die Anweisungen in den Lösungen. Dann versuchen Sie es ein zweites Mal.

Als letzter "Check" stellt Ihnen danach der Tutor ein paar Fragen zu diesem Kapitel.

Aufgabe 1.11: "Das Drehrestaurant"

Sie sitzen in einem Drehrestaurant (z.B. auf dem Schilthorn).

a) Wie könnten Sie feststellen, ob sich das Restaurant gleichförmig dreht?

b) Wie können Sie die Winkelgeschwindigkeit messen?.

Aufgabe 1.12: "Geschwindigkeit der Erde"

Die Erde umkreist die Sonne näherungsweise auf einer Kreisbahn mit einem Radius von $149{,}6 \cdot 10^6$ km. Ein Umlauf dauert ein Jahr oder 365,25 Tage. Berechnen Sie die Bahngeschwindigkeit der Erde in m/s.

Aufgabe 1.13: "Ein Speichenrad als Musikinstrument"

Ein Speichenrad mit 32 Speichen braucht für eine Umdrehung 0,2 s. Sie halten sehr vorsichtig ein Stück Karton hinein. Welche Frequenz hat der Ton, den Sie hören?

Lösungen und Hinweise zu den Aufgaben

Lösung 1.1: "Das Bogenmass"

Der 90° Winkel entspricht einem Viertel des Kreisumfanges. Also gilt:

$$\alpha = 90° = 2\pi / 4 = \pi / 2 = 1.571 \text{ rad}$$

Der 45° Winkel entspricht einem Achtel des Kreisumfanges. Also gilt:

$$\alpha = 45° = 2\pi / 8 = \pi / 4 = 0.785 \text{ rad}$$

Für den 37° Winkel kann die folgende "Dreisatzrechnung" gemacht werden:

$$\alpha = 37° = 2\pi * (37°/360°) = 0.646 \text{ rad}$$

Lösung 1.2: "Die gleichförmige Kreisbewegung"

Jeder Gegenstand auf der Erde dreht sich in einer gleichförmigen Kreisbewegung um die Erdachse.

Der Stundenzeiger einer Uhr dreht sich in 12 Stunden in einer gleichförmigen Kreisbewegung über das Zifferblatt.

Fährt ein Auto mit *konstanter* Geschwindigkeit, so drehen die Räder *gleichförmig*. Also bewegt sich z.B. das Ventil in einer gleichförmigen Kreisbewegung um die Radachse.

Lösung 1.3: "Die Winkelgeschwindigkeit"

In der Zeit von 2 s wird ein Winkel von 2π überstrichen. Also beträgt die Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = 2\pi / 2s = \pi * (\text{rad/s}) = 3.14 \text{ rad/s}$$

Lösung 1.4: "Die Winkeländerung"

a) Die Winkelgeschwindigkeit gibt an, welcher Winkel (in Radiant) pro Sekunde überstrichen wird. Also wird in 6 Sekunden ein Winkel von

$$\varphi = \omega \cdot t = (\pi / 4) \cdot (rad / s) \cdot 6s = 3\pi / 2 \text{ rad überstrichen.}$$

b) Eine volle Umdrehung entspricht 2π oder 360°. Also gilt $3\pi / 2$ rad = 270°.

Lösung 1.5: "Die Erdrotation"

Rechnen wir T in Sekunden um: $T = 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s} = 86400 \text{ s}$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 7.3 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

Freiwillige Ergänzung für "Astronomen":

Genau genommen dreht sich die Erde in einem *Sterntag* um ihre Achse. Ein Punkt auf der Erde, der vom Erdzentrum gesehen auf einen Fixstern zeigt, ist nach einem Sterntag wieder auf diesen Fixstern ausgerichtet. Ein Sterntag dauert nur 86164 s. Er ist kürzer als der Sonnentag, weil beim Sonnentag die Umkreisung der Sonne mit einbezogen wird.

Lösung 1.6: "Das schnelle Rad"

In der Zeit von 1 s kann sich das Rad (1/0.02s) = 50 Mal/s drehen. In 1 s ist die Umlaufzeit von 0.02 s 50 mal enthalten. Das Rad dreht sich 50 mal pro Sekunde.

Lösung 1.7: "Der Getriebeschaden"

200 mal in der Sekunde erzeugt das defekte Zahnrad dieselbe Luftdruckschwankung. Es dreht sich also 200 mal pro Sekunde. Seine Umdrehungsfrequenz f ist 200 Hz. Somit berechnet sich ω und T:

$$\omega = 2\pi f = 1256.6 \text{ rad}*\text{s}^{-1} \qquad T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} = 5\cdot 10^{-3} \text{ s} = 5 \text{ ms}$$

Lösung 1.8: "Der Töfffahrer"

a) Die Geschwindigkeit v des Töffs beträgt:

$$v = 100\text{m}/3.6\text{s} = 27.78 \text{ m/s}, \quad v = \omega r$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{v}{r} = (27.78 \text{ m/s})/160\text{m} = 0.174 \text{ s}^{-1}$$

b) Ein Viertel eines vollen Kreiswinkels 2π ist $\pi/2 = \Delta\varphi$.
Die für den Winkel Δφ benötigte Zeit beträgt: $\Delta t = \Delta\varphi/\omega = (\pi/2)/0.174 \text{ s}^{-1} = 9.03 \text{ s}$

c) Der Töfffahrer geht hier an die Grenzen seiner Möglichkeiten. 100 km/h ist eine recht hohe Geschwindigkeit für eine Kurve mit einem Radius von 160 m. Am Ende dieses Leitprogrammes werden Sie diese Antwort physikalisch begründen können.

Lösung 1.9: "Das Karussell"

a) Beide Pferdchen bewegen sich mit derselben Winkelgeschwindigkeit ω. Die Winkelgeschwindigkeit ist für *alle* Figuren auf dem Karussell *gleich gross*. Alle Figuren machen ja in derselben Zeit T eine volle Umdrehung.

b) Zur Zeit $t_o = 0$ s beträgt der Winkel φ_o. Zwischen dem Zeitpunkt t_o und dem Zeitpunkt t wird ein Winkel von $\varphi = \omega\, t$ überstrichen. Also beträgt der Winkel φ zu einer beliebigen Zeit t:

(*1.14) $$\boldsymbol{\varphi(t) = \varphi_o + \omega\, t}$$

Der Radius r bleibt bei der Kreisbewegung konstant. Also gilt:

(*1.15) $$\mathbf{r(t) = r_o = const.}$$

Diese beiden Formeln sollten Ihnen so klar sein, dass Sie sie jederzeit aufschreiben könnten!

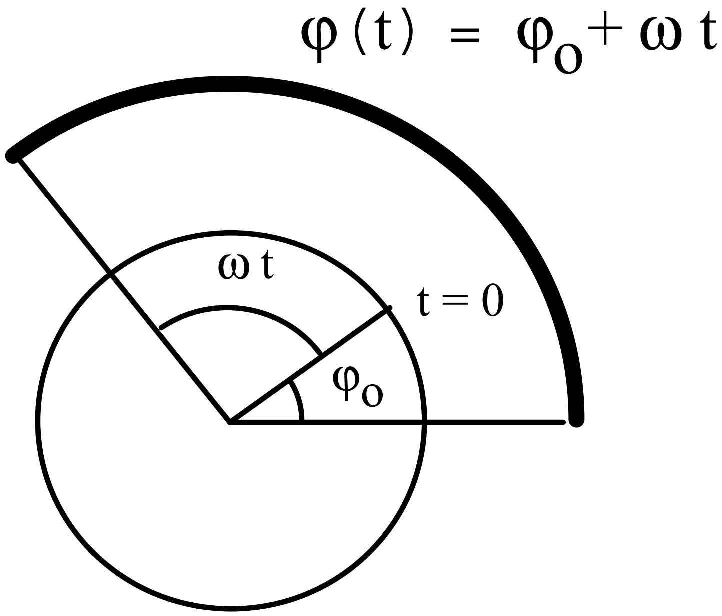


Fig. 1.5

c) Zwischen dem Zeitpunkt t_o und dem Zeitpunkt t wird ein Winkel von $\varphi = \omega\,(t - t_o)$ überstrichen. In der Aufgabe b) war der Zeitpunkt $t_o = 0$ s, sodass t_o weggelassen werden konnte. Somit ist in allen Formeln von Aufgabe b) $\boldsymbol{\omega\, t}$ durch $\boldsymbol{\omega\,(t - t_o)}$ zu ersetzen.

Lösung 1.10: "Das Rennen auf dem Karussell"

a) Die Umlaufzeit T berechnet sich nach $T = \frac{1}{f} = 10$ s.

(Natürlich ist sie für beide Pferde gleich.)

b) Die Winkelgeschwindigkeit ω berechnet sich nach $\omega = 2\pi f$. Mit ω berechnet sich die Bahngeschwindigkeit einfach über $v = r\,\omega$. Die Bahngeschwindigkeitsdifferenz ist somit:

$$\Delta v = (r_2 - r_1)\,\omega = 1.5 \cdot 2\pi \cdot 0.1 \text{ m/s} = 0.942 \text{ m/s}$$

Das äussere Pferd ist schneller, denn es hat in der gleichen Zeit einen weiteren Weg zurückgelegt.

Lösung 1.11: "Das Drehrestaurant"

a) Gleichförmig drehen heisst in gleichen Zeitabschnitten gleiche Winkel überstreichen. Um dies zu überprüfen gibt es verschiedene Möglichkeiten: Sind z.B. die Fenster regelmässig angeordnet, so nehmen Sie als Winkelmass (Bogen) den Abstand zweier Fenster. Dauert es immer gleich lang bis das nächste Fenster in derselben Position ist, so dreht sich das Restaurant gleichförmig.

Hilfe: Repetieren Sie die Definition der gleichförmigen Kreisbewegung, lösen Sie Aufgabe 1.6 noch einmal.

b) Die Periode T ist einfach zu messen. Sie schauen, wie lange es dauert, bis sich das Restaurant um 360° gedreht hat. Daraus lässt sich ω berechnen $\omega = \frac{2\pi}{T}$

Hilfe: Arbeiten Sie den Stoff von Aufgabe 1.7 bis und mit Aufgabe 1.9 nochmals durch.

Lösung 1.12: "Geschwindigkeit der Erde"

Die Umlaufszeit der Erde in Sekunden ist $T = 365{,}25 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s} \approx 31{,}6 \cdot 10^6 \text{ s}$.

Daraus lässt sich ω berechnen: $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Die Bahngeschwindigkeit beträgt:

$$v = \omega\, r = 2\pi \cdot r / T = 149{,}6 \cdot 10^9 \text{ m} \cdot 6{,}283/(31{,}6 \cdot 10^6 \text{ s}) \approx 30'000 \text{ m/s}$$

(Eine Höllengeschwindigkeit!)

Hilfe: Arbeiten Sie den Abschnitt "Die Bewegung auf dem Kreis" bis und mit Aufgabe 1.12 noch einmal durch.

Lösung 1.13: "Ein Speichenrad als Musikinstrument"

Das Rad dreht sich mit einer Frequenz $f = \frac{1}{T} = 5 \text{ Hz}$.

Da das Rad 32 Speichen hat und so pro Umdrehung 32 mal ein Geräusch von sich gibt, ertönt ein Ton von $f \cdot 32 = 160 \text{ Hz}$.

Hilfe: Arbeiten Sie den Stoff von Aufgabe 1.10 bis und mit Aufgabe 1.11 noch einmal durch.

Ursache der Kreisbewegung

Übersicht

Im ersten Kapitel haben Sie die gleichförmige Kreisbewegung kennengelernt. Sie kennen nun Begriffe wie Umlaufszeit und Frequenz. Aus dem Radius der Kreisbahn und der Winkelgeschwindigkeit können Sie den Betrag der Bahngeschwindigkeit berechnen.
Im Kapitel 2, das Sie nun in Angriff nehmen, werden Sie die Kraft, welche für die Kreisbahn verantwortlich ist, kennenlernen. Man nennt sie die Zentripetalkraft.

Dieses Kapitel ist folgendermassen gegliedert:

In Abschnitt 2.1 werden Sie die Bahngeschwindigkeit als Vektor kennenlernen. Sie werden sehen, dass sich dieser bei einem Umlauf ändert. Der umlaufende Körper ist also beschleunigt.

In Abschnitt 2.2 werden wir dann Betrag und Richtung dieser Beschleunigung berechnen.

In Abschnitt 2.3 schliessen wir aus dem 2. Newton-Axiom, dass diese Beschleunigung durch eine Zentripetalkraft verursacht wird. Sie werden sich dabei in einem Experiment selbst vom Vorhandensein und von der Grösse dieser Kraft überzeugen.

Zum Abschluss können Sie anhand von Testaufgaben selbst prüfen, ob Sie den Stoff verstanden haben und anwenden können.

Lernziele für Kapitel 2

- Sie kennen den Unterschied zwischen dem Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$ und dessen Betrag v und haben verstanden, dass die Bahngeschwindigkeit als Vektor aufzufassen ist.

- Sie kennen die Richtung und den Betrag der Zentripetalbeschleunigung.

- Sie können erklären, weshalb bei einer gleichmässigen Kreisbewegung eine Zentripetalkraft wirken muss. Sie kennen deren Richtung und können deren Betrag bestimmen.

2.1 Die Bahngeschwindigkeit als Vektorgrösse

2.1.1 Die Geschwindigkeit als Vektor

In diesem Abschnitt geht es um den Unterschied zwischen $\vec{v}$ und *v*. Für diesen Abschnitt arbeiten Sie mit dem Lehrbuch "Physik in einem Band" von Dorn-Bader der Schülerhand-bibliothek.

Dabei haben Sie folgende Aufgabe:

Sie lesen von Kapitel 78 den Beginn von Abschnitt 1, also die Seite 250 sowie die Definition oben auf Seite 251. Damit haben Sie das Wichtige begriffen.

Falls das Buch in der Bibliothek fehlt, können Sie den folgenden Text als Ersatz lesen:

Ein Körper führt eine gleichförmige Bewegung aus, wenn er sich längs einer Geraden bewegt und in gleichen, beliebig kleinen Zeiten Δt immer gleich lange Wege Δs zurücklegt. Da der Weg nicht nur eine bestimmte Länge, sondern auch eine bestimmte ***Richtung*** *hat, ist er als Vektor aufzufassen: Wir schreiben also statt Δs nun $\Delta\vec{s}$.*

Unter der Geschwindigkeit einer gleichförmigen Bewegung versteht man nun den Quotienten aus dem in einem Zeitintervall Δt zurückgelegten Weg $\Delta\vec{s}$ und dem Zeitintervall Δt:

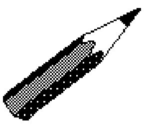
$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t} \qquad (2.1)$$

Dabei wurde berücksichtigt, dass der vom Massenpunkt zurückgelegte Weg eine gerichtete Grösse, also eine vektorielle Grösse, darstellt. Damit ist auch die Geschwindigkeit eine vektorielle Grösse.

Für eine gleichförmige Bewegung, bei der sich der Massenpunkt zur Zeit $t = 0$ im Nullpunkt des Koordinatensystems befindet, kann die Geschwindigkeit auch folgendermassen geschrieben werden:

Vektorgleichung:
$$\vec{v} = \frac{\vec{s}}{t} \qquad (2.2)$$

Betragsgleichung:
$$v = \frac{s}{t} \qquad (2.3)$$



Aufgabe 2.1: "Geschwindigkeit als Vektorgrösse"

Welche zwei Beziehungen fasst die Vektorgleichung

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t} \qquad \text{zusammen?}$$

Die richtigen Lösungen finden Sie am Ende des Kapitels.

2.1.2 Der Geschwindigkeitsvektor bei der gleichförmigen Kreisbewegung

Wir kehren nun zur gleichförmigen Kreisbewegung zurück. Wir betrachten einen Körper, der sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω auf einer Kreisbahn vom Radius r bewegt.

Zur Zeit t befindet sich der Körper im Punkt P(t) (Fig. 2.1). Welche Richtung hat der Geschwindigkeitsvektor zu diesem Zeitpunkt t?

Wir betrachten dazu die Bewegung während des nachfolgenden Zeitintervalles Δt. Für den Geschwindigkeitsvektor gilt dann: $\vec{v} = \frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t}$

$\vec{v}$ hat also die Richtung von $\Delta\vec{s}$. Somit müssen wir im ersten Schritt die Richtung von $\Delta\vec{s}$ herausfinden.

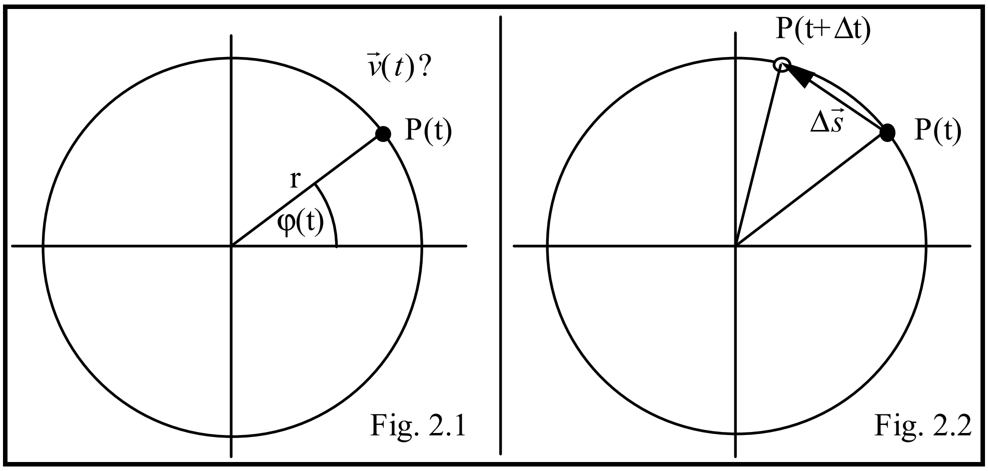


Fig. 2.1 Fig. 2.2

Nach der Zeit Δt befindet sich der Körper im Punkt P(t+Δt), wobei er den Kreisbogen von P(t) nach P(t+Δt) zurückgelegt hat. Dieser Kreisbogen ist aber eine Linie, deren Richtung sich laufend ändert. Dies bedeutet, dass auch die Geschwindigkeit ihre Richtung während des Zeitintervalles Δt ändert. Gesucht ist aber die Richtung der Geschwindigkeit zu einem bestimmten Zeit**punkt** t, also die Richtung der **Momentan**geschwindigkeit.

Die Sehne $\Delta\vec{s}$ von P(t) nach P(t+Δt) liefert uns die Richtung der **mittleren** Geschwindigkeit im Zeitintervall Δt. Wählt man dieses Zeitintervall immer kleiner, so nähert sich diese mittlere Geschwindigkeit immer mehr der Momentangeschwindigkeit. Für ein beliebig kleines Zeitintervall Δt hat die Sehne $\Delta\vec{s}$ dann die Richtung der Tangente im Punkt P(t). Also hat auch $\vec{v}$ in P(t) die Richtung der Bahntangente in P(t).

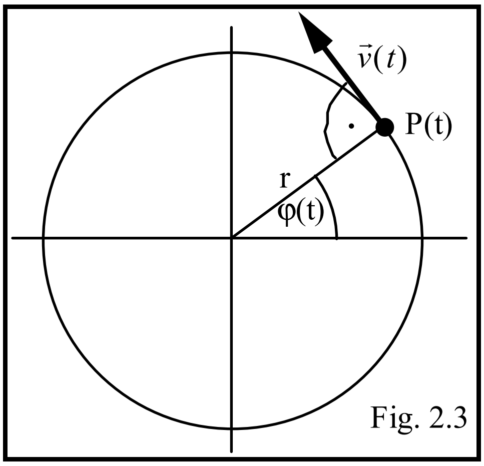
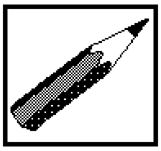


Fig. 2.3



Aufgabe 2.2: "Geschwindigkeitsvektor zu verschiedenen Zeiten"

Ein (punktförmiger) Körper bewegt sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{2}{3} s^{-1}$ auf einem Kreis mit Radius 3,0 cm.

Zur Zeit t = 0 überquert er die x-Achse in mathematisch positivem Umlaufsinn, d.h. entgegen dem Uhrzeiger. Wie gross ist die Umlaufszeit T?

Zeichnen Sie für die Zeiten

$$t = 0 \text{ s}, \quad \frac{\pi}{2} \text{ s}, \quad \pi \text{ s}, \quad \frac{3\pi}{2} \text{ s}, \quad 2\pi \text{ s}, \quad \frac{5\pi}{2} \text{ s}$$

den Ort auf dem Kreis und den Vektor der Momentangeschwindigkeit.

Die vollständige und korrekte Zeichnung finden Sie am Ende des Kapitels.

Aufgabe 2.3: "Funken am Schleifstein"

Erklären Sie das Verhalten der Funken am Schleifstein auf dem untenstehenden Foto.

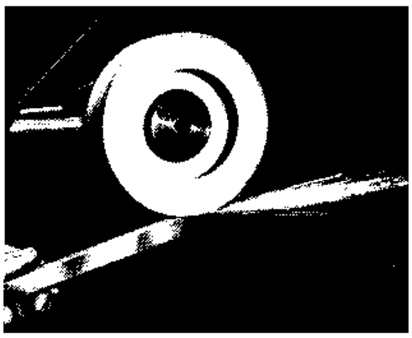


Fig. 2.4

2.2 Die Zentripetalbeschleunigung

Erinnern Sie sich noch an die Definition der Beschleunigung? Unter der Beschleunigung versteht man den Quotienten aus der Änderung des Geschwindigkeitsvektors und der dabei verflossenen Zeit Δt:

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \tag{2.4}$$

Betrachten Sie nun Ihre Zeichnung von Aufgabe 2.2, in der Sie den Geschwindigkeitsvektor für die gleichförmige Kreisbewegung zu verschiedenen Zeitpunkten eingezeichnet haben, so erkennen Sie sofort:

Der Betrag der Geschwindigkeit ist zwar konstant, aber die **Richtung** des Geschwindigkeits**vektors** ist nicht konstant, wenn sich ein Körper gleichförmig entlang einer Kreisbahn bewegt. Daraus folgt, dass der Körper beschleunigt ist.

2.2.1 Berechnung der Zentripetalbeschleunigung

Wir berechnen nun die Beschleunigung $\vec{a}$, die ein Körper erfahren muss, damit er sich gleichmässig auf einer Kreisbahn bewegt.

Betrachten Sie dazu die folgenden Abbildungen:

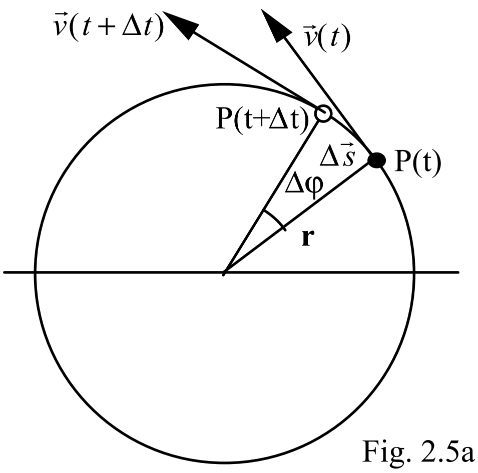


Fig. 2.5a

Konstruktion der Geschwindigkeitsänderung $\Delta\vec{v}$ durch Parallelverschiebung der Geschwindigkeitsvektoren

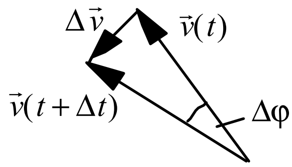


Fig. 2.5b

Für ein kleines Zeitintervall Δt können wir den Kreisbogen wiederum durch die Sehne $\Delta\vec{s}$ ersetzen.

Während sich der Körper um den Winkel Δφ weiter bewegt, dreht sich auch der Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$ um den Winkel Δφ . Somit folgt aus der Ähnlichkeit der beiden Dreiecke:

$$\frac{\Delta s}{r} = \frac{\Delta v}{v} \tag{2.5}$$

Setzt man für $\Delta s = v \cdot \Delta t$ und für $\Delta v = a \cdot \Delta t$ ein, ergibt dies

$$\frac{v \cdot \Delta t}{r} = \frac{a \cdot \Delta t}{v} \qquad (2.6)$$

Für die gesuchte Beschleunigung a gilt also:

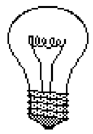
$$a = \frac{v^2}{r} \qquad (2.7)$$

Mit der Beziehung $v = \omega r$ finden wir:

$$a = \omega^2 \cdot r \qquad (2.8)$$

Aber in welche Richtung zeigt diese Beschleunigung?

Betrachten Sie die Figur 2.5b und lassen Sie Δt gegen Null gehen. Das Dreieck der Geschwindigkeitsvektoren wird immer schmaler und im Grenzfall steht $\Delta\vec{v}$ senkrecht auf $\vec{v}$. Die Änderung $\Delta\vec{v}$ ist also gegen den Kreismittelpunkt hin gerichtet. Aus der Definition der Beschleunigung folgt, dass die Beschleunigung $\vec{a}$ die gleiche Richtung hat wie die Geschwindigkeitsänderung $\Delta\vec{v}$. Die Beschleunigung zeigt also auch gegen den Kreismittelpunkt.



Wir fassen zusammen:

Ein gleichförmig kreisender Körper erfährt eine Beschleunigung:

$$a_z = \frac{v^2}{r} = \omega^2 \cdot r \qquad \mathbf{(2.9)}$$

Diese ist gegen das Kreiszentrum gerichtet und wird *Zentripetalbeschleunigung* genannt.

Im nachfolgenden Abschnitt 2.2.2 können Sie eine völlig andere Herleitung der Formel für die Zentripetalbeschleunigung finden. Dabei wird die gekrümmte Bahn aus zwei Teilbewegungen zusammengesetzt und ein Satz aus der Geometrie angewendet. Dieser Abschnitt gehört nicht zum obligatorischen Fundamentum. Bearbeiten Sie ihn nur, wenn Sie bis jetzt in diesem Leitprogramm zügig vorangekommen sind und Freude an geometrischen Überlegungen haben. Andernfalls lösen Sie die Aufgabe 2.4 und fahren dann mit Kapitel 2.3 weiter.

Aufgabe 2.4: "Mondbewegung und Zentripetalbeschleunigung"

Die Bewegung des Mondes kann in guter Näherung als gleichmässige Kreisbewegung um die Erde beschrieben werden. Der Bahnradius (genauer: die mittlere Entfernung vom Zentrum der Erde zum Mittelpunkt des Mondes) misst 384'000 km. Die Umlaufszeit des Mondes um die Erde beträgt 27 d 8 h.

a) Wie gross ist die Zentripetalbeschleunigung, die der Mond erfährt?

b) Was würde geschehen, wenn der Mond nicht ständig diese Zentripetalbeschleunigung zum Erdmittelpunkt hin erfahren würde?

2.2.2 Berechnung der Zentripetalbeschleunigung mit dem Höhensatz

In diesem Abschnitt werden wir noch einmal den Betrag der Zentripetalbeschleunigung herleiten, wobei wir den Höhensatz aus der Mathematik anwenden werden.

Falls Sie damit nicht mehr vertraut sind, können Sie diese geometrische Beziehung in der DMK/DPK-Formelsammlung auf Seite 56 nachschlagen.

Betrachten Sie nun folgende Figur:

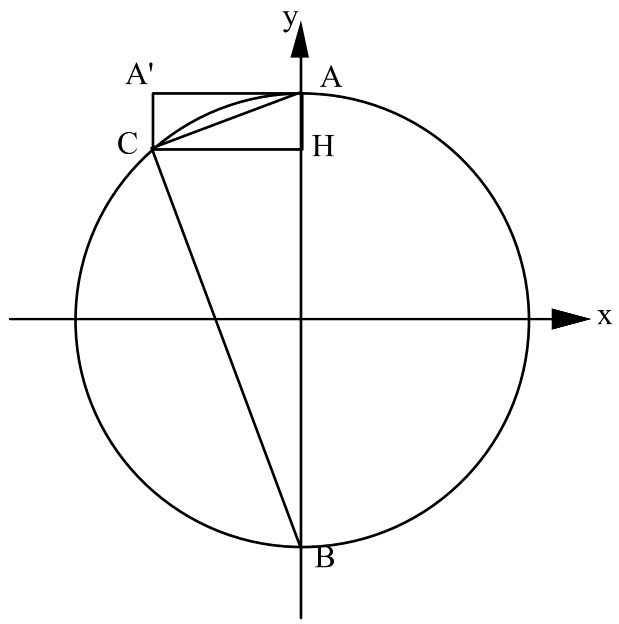


Fig. 2.6

Vom Punkt A aus legt ein Körper infolge der Bahngeschwindigkeit in einem kleinen Zeitintervall Δt in horizontaler Richtung näherungsweise die Strecke

$$\overline{AA'} = v \cdot \Delta t \qquad (2.10)$$

zurück.

Diese entspricht der Höhe des Dreiecks ABC, denn $\overline{HC} = \overline{AA'}$.
Folglich ist

$$\overline{HC} = v \cdot \Delta t \tag{2.11}$$

Unter dem Einfluss der Zentripetalbeschleunigung allein würde sich der Körper von A aus in vertikaler Richtung während Δt von A nach H bewegen. Diese Strecke berechnet man nach dem Gesetz der gleichmässig beschleunigten Bewegung analog zu s = $\frac{a}{2}t^2$.

$$\overline{AH} = \frac{a_z}{2}(\Delta t)^2 \tag{2.12}$$

Tatsächlich führt der Körper auf der Kreisbahn beide Bewegungen miteinander aus und befindet sich nach der Zeit Δt im Punkt C.

Offensichtlich ist das Dreieck ABC rechtwinklig, denn die Kreisbahn stellt den Thaleskreis über der Hypothenuse $\overline{AB}$ dar.

Nun benützen wir den **Höhensatz.** Dieser besagt:
Das Produkt der beiden Hypothenusenabschnitte ist gleich dem Quadrat der Höhe.
Also:

$$\overline{AH} \cdot \overline{HB} = (\overline{HC})^2 \tag{2.13}$$

Einsetzen ergibt:

$$(\frac{a_z}{2}(\Delta t)^2) \cdot (2r - \frac{a_z}{2}(\Delta t)^2) = (v \cdot \Delta t)^2 \tag{2.14}$$

Ausmultiplizieren und dividieren durch $(\Delta t)^2$ liefert:

$$a_z \cdot r - \frac{a_z^2}{4} \cdot (\Delta t)^2 = v^2 \tag{2.15}$$

Obige Überlegung gilt umso genauer, je kleiner Δt ist. Lassen wir Δt gegen Null streben, können wir den Summanden mit $(\Delta t)^2$ vernachlässigen, und wir finden wie erwartet:

$$a_z = \frac{v^2}{r} \tag{2.16}$$

Zudem haben Sie gesehen, dass die gleichförmige Kreisbewegung für kleine Zeiten Δt als Überlagerung zweier Bewegungen dargestellt werden kann:

1. gleichförmige Bewegung in Richtung der Bahntangente mit Geschwindigkeit $\vec{v}$
2. gleichmässig beschleunigte, zum Kreismittelpunkt gerichtete Bewegung mit der Zentripetalbeschleunigung $\vec{a_z}$.

2.3 Die Zentripetalkraft

Im vorigen Abschnitt haben Sie folgendes erkannt:
Führt ein Körper eine gleichförmige Kreisbewegung aus, so muss er die zum Kreismittelpunkt hin gerichtete Zentripetalbeschleunigung $\vec{a_z}$ vom Betrag $a_z = \frac{v^2}{r}$ (2.17) erfahren.

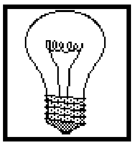
2.3.1 Das 2. Newton-Axiom und die Zentripetalkraft

Für diesen Abschnitt benötigen wir das 2. Newton-Axiom, die Grundgleichung der Mechanik:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \qquad (2.18)$$

Die beschleunigende Kraft $\vec{F}$, d.h. die Resultierende aller auf den Körper wirkenden Kräfte, ist gleich dem Produkt aus der Masse m des Körpers und der Beschleunigung $\vec{a}$, die dieser durch die resultierende Kraft erfährt.

Nach der Grundgleichung der Mechanik muss also stets eine Kraft wirken, damit eine Beschleunigung entsteht. Also muss auch bei der gleichmässigen Kreisbewegung die Resultierende von Null verschieden sein, die am kreisenden Körper angreifenden Kräfte heben sich nicht auf.

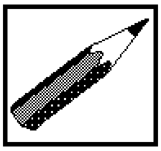


Es gilt damit:
Damit ein Körper eine gleichförmige Kreisbewegung ausführen kann, muss auf ihn eine zum Kreismittelpunkt hin gerichtete Resultierende wirken. Sie hat den Betrag

$$F_z = m \cdot a_z = m \cdot \frac{v^2}{r} = m \cdot \omega^2 \cdot r \qquad \mathbf{(2.19)}$$

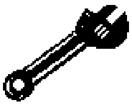
Diese Resultierende nennt man *Zentripetalkraft.*

ACHTUNG! Merken Sie sich:
"Zentripetalkraft" ist nur ein *anderer Name* für die Resultierende bei gleichförmigen Kreisbewegungen. Sie setzt sich aus den wirklich am Körper angreifenden Kräften zusammen und ist *nicht* eine Kraft, die zusätzlich zu diesen wirkt.



Aufgabe 2.5: "Zentripetalkraft und Kreisbewegung"
Ist die Aussage "Ein Körper bewegt sich auf einem Kreis, dadurch entsteht eine Zentripetalkraft" richtig oder falsch ?
(Läuchli/Müller S. 110, A4 - 393)
Die richtige Lösung finden Sie am Ende des Kapitels.

2.3.2 Experimentelle Überprüfung



Experiment 2.1.
Damit Sie sich von der Existenz und von der Grösse der Zentripetalkraft überzeugen können, werden Sie nun ein Experiment durchführen.

a) Organisatorisches
Sie werden das Experiment zusammen mit zwei MitschülerInnen durchführen. Schauen Sie bei Ihren MitschülerInnen nach, wer beim Bearbeiten des Leitprogrammes etwa gleich weit ist und mit Ihnen zusammenarbeiten kann.

b) Apparatur
Zur Messung der Zentripetalkraft benützen Sie folgende Experimentiervorrichtung:

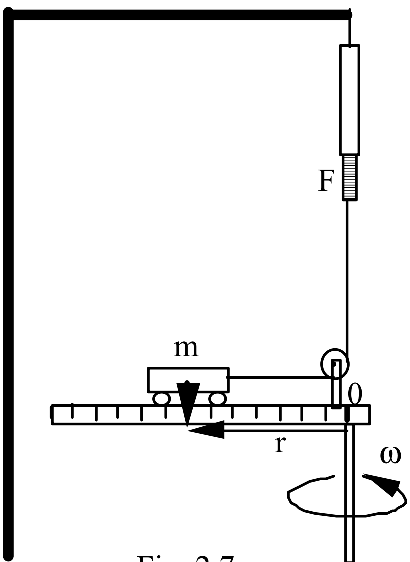


Fig. 2.7

Ein Wagen der Masse m befindet sich auf einer horizontalen Schiene. Diese kann mit einem Motor um die vertikale Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotiert werden. Dabei beschreibt der Wagen eine horizontale Kreisbahn mit dem Radius r. Der Betrag der Kraft, mit welcher der Faden den Wagen gegen den Kreismittelpunkt O zieht, kann am Kraftmesser abgelesen werden.

Skizzieren Sie die Situation und zeichnen Sie alle auf den rotierenden Wagen einwirkenden Kräfte ein. Überzeugen Sie sich davon, dass alle andern Kräfte ausser der Fadenkraft sich gerade aufheben. Damit ist die Fadenkraft auch die Resultierende, d.h. die Zentripetalkraft dieser Kreisbewegung.

c) Durchführung des Experimentes

Sie führen zwei verschiedene Messungen durch:

(1) Winkelgeschwindigkeit ω fest, Radius r variabel

- Stellen Sie den Motor auf eine feste Drehzahl ein. Bestimmen Sie die Winkelgeschwindigkeit ω mit Hilfe der Stoppuhr!

  Ein Tip: Der Wert für ω wird genauer, wenn Sie die Zeit für 10 Umläufe messen und daraus die Winkelgeschwindigkeit ω bestimmen!
- Durch Verschieben des Kraftmessers entlang der Vertikalen können Sie den Radius der Kreisbahn verändern.

  Messen Sie nun für drei verschiedene Radien den Betrag der Zentripetalkraft und tragen Sie die Werte in eine Tabelle ein.
- Vergleichen Sie den gemessenen Wert mit dem berechneten Betrag für die Zentripetalkraft!

(2) Winkelgeschwindigkeit ω variabel, Radius r fest

- Stellen Sie eine Umlauffrequenz f so ein, dass der Wagen eine Kreisbahn vom Radius r_o = 15 cm beschreibt.
- Bestimmen Sie mit der Stoppuhr die Winkelgeschwindigkeit ω und lesen Sie den Betrag der Zentripetalkraft ab.
- Messen Sie den Betrag der Zentripetalkraft für zwei weitere Umlauffrequenzen, aber bei gleichem Radius r_o. Dies können Sie erreichen, indem Sie nach dem Einstellen der neuen Frequenz den Kraftmesser entlang der Vertikalen verschieben, bis der Kreisradius wieder r_o beträgt.
- Erstellen Sie eine Tabelle und tragen Sie die Messwerte ein. Vergleichen Sie den gemessenen und den berechneten Wert für die Zentripetalkraft!

Zum Abschluss haben Sie nun noch die Möglichkeit, selber zu überprüfen, ob Sie den Stoff von Kapitel 2 verstanden haben und bei Problemstellungen anwenden können .

Wenn Sie von den vier Teilaufgaben 2.6a)+b) und 2.7a)+b) mindestens drei richtig gelöst haben, können Sie sich beim Tutor zum Kapiteltest melden. Aufgabe 2.8 ist fakultativ und eine Herausforderung für speziell Interessierte.

Die richtigen Lösungen zu den Aufgaben finden Sie am Ende des Kapitels.

Aufgabe 2.6: "Umlaufgeschwindigkeit eines Steins"

Ein Stein der Masse m = 0,5 kg wird an einer Schnur auf einer horizontalen Kreisbahn vom Radius r = 1 m herumgeschleudert. Dabei beträgt die Kraft in der horizontalen Schnur 200 N .

a) Wie gross ist die Umlaufgeschwindigkeit des Steins?

b) Wie gross ist die benötigte Kraft in der Schnur, wenn bei festem Radius die Umlaufgeschwindigkeit des Steins verdoppelt wird?

c) Was passiert, wenn die Schnur plötzlich reisst?

Aufgabe 2.7: "Körper auf zwei verschiedenen Kreisbahnen"

Ein Körper von 150 g bewegt sich auf einem Kreis von 50 cm oder auf einem solchen von 100 cm Radius.

a) Welche Zentripetalkraft muss wirken, damit die Bewegung in beiden Fällen mit einer Bahngeschwindigkeit von 2 m/s erfolgt?

b) Wie gross ist die benötigte Zentripetalkraft, wenn die Umlaufszeit auf beiden Kreisen 1,5 s beträgt ?

(Läuchli/Müller, S. 111, A4 - 396)

Aufgabe 2.8: "Impulsänderung und Zentripetalkraft"

Berechnen Sie den Betrag der Zentripetalkraft aus der Beziehung $\textit{Impulsänderung} = \textit{Kraftstoss} \quad \Delta\vec{p} = \vec{F} \cdot \Delta t$.

Hinweis: Betrachten Sie folgende Skizze, benutzen Sie die Definition des Impulses $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ sowie die Näherung $\sin\Delta\varphi \approx \Delta\varphi$ (im Bogenmass!) für kleine $\Delta\varphi$.

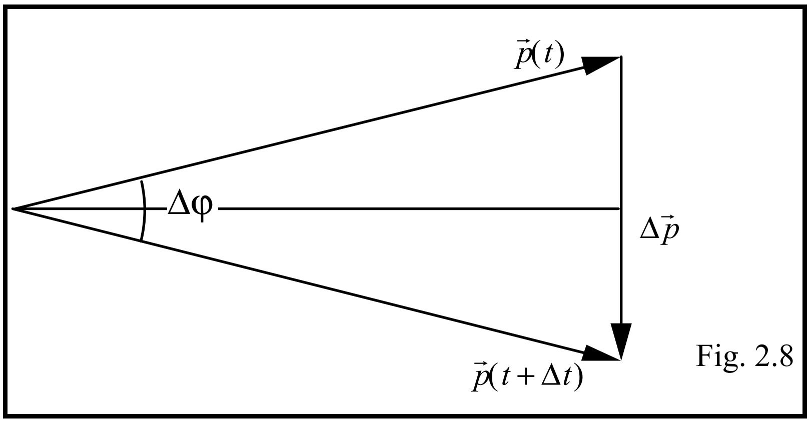


Fig. 2.8

Lösungen und Hinweise zu den Aufgaben

Lösung 2.1: "Geschwindigkeit als Vektorgrösse"

1. Der Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$ hat die Richtung des zurückgelegten Weges $\Delta\vec{s}$.
2. Der Betrag v des Geschwindigkeitsvektors $\vec{v}$ ist gleich dem Quotienten aus dem Betrag des zurückgelegten Weges $\Delta\vec{s}$ und der dazu benötigten Zeit Δt.

Lösung 2.2: "Geschwindigkeitsvektor zu verschiedenen Zeiten"

Die Umlaufzeit ist $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{\frac{2}{3}s^{-1}} = 3\pi s = 9{,}42 s$

Nach der Zeit t = π/2 s ist der Winkel zur x-Achse $\varphi = \omega \cdot t = (2/3\ s^{-1}) \cdot (\pi/2\ s) = \pi/3 = 60°$

Der Betrag der Geschwindigkeit ist zu jeder Zeit $v = \omega \cdot r = (2/3\ s^{-1}) \cdot 3cm = 2$ cm/s

und der Geschwindigkeitsvektor ist tangential zum Kreis im betreffenden Punkt.

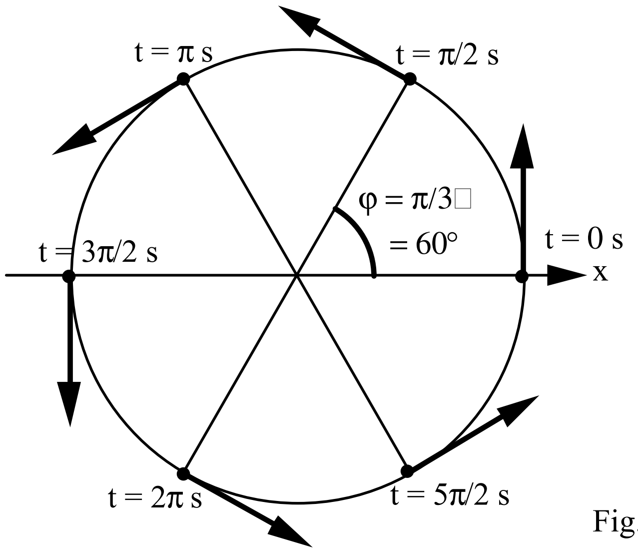


Fig. 2.9

Hat Ihnen die Berechnung der Umlaufzeit Mühe bereitet, so repetieren Sie Formel (1.9) von Kap. 1. Für die Berechnung des Winkels φ brauchen Sie Formel (1.14), wobei in unserem Beispiel $\varphi_0 = 0$ ist (warum?). Den Betrag der Geschwindigkeit liefert Formel (1.13), die Richtung können Sie Fig. 2.3 entnehmen.

Lösung 2.3: "Funken am Schleifstein"

Der rotierende Schleifstein reibt am Eisenstab und reisst ihm kleine Eisenspäne weg. Diese werden durch die Reibung so stark erhitzt, dass sie glühen. Diese glühenden Späne lösen sich von der Oberfläche des Schleifsteines und fliegen in der Richtung weg, welche ihr Geschwindigkeitsvektor in diesem Moment auf dem rotierenden Stein hat. Diese Richtung ist bekanntlich tangential zur Kreisbahn. Deshalb sind die Leuchtspuren auf dem Foto Tangenten an den kreisförmigen Stein.

Siehe dazu auch obenstehende Fig. 2.9 von Lösung 2.2.

Lösung 2.4: "Mondbewegung und Zentripetalbeschleunigung"

a) $a = \omega^2 \cdot r$, mit $\omega = 2\pi \cdot f = \frac{2\pi}{T}$ wird dies zu $a_z = (\frac{2\pi}{T})^2 \cdot r = \frac{4\pi^2 \cdot r}{T^2}$ = 0,00272 m/s^2

b) Wenn der Mond nicht ständig diese Zentripetalbeschleunigung zum Erdmittelpunkt hin erführe, würde er auf der Kreistangente an die Mondbahn geradlinig weiterfliegen.

Sind Sie auch zu diesen Ergebnissen gekommen? Falls ja, dann können Sie gleich mit Kapitel 2.3 weiterfahren. Wenn nicht, dann sollten Sie die Lösung von Aufgabe 2.2 (Figur 2.9) nochmals anschauen und das Kapitel 2.2 bis zum Ende von Abschnitt 2.2.1 erneut durcharbeiten.

Lösung 2.5: "Zentripetalkraft und Kreisbewegung"

Die Aussage ist falsch! Die Zentripetalkraft ist die **Ursache** für die Kreisbewegung und nicht die Folge der Kreisbewegung

Sind Sie zum Schluss gekommen, die Aussage sei richtig? Dann ist es nötig, dass Sie einige Seiten zurückblättern und sich sowohl den Anfang vom Kapitel 2.2 (bis zu den Figuren 2.5a und 2.5b) wie auch das Kapitel 2.3 bis zur Aufgabe 2.5 nochmals genau anschauen.

Lösung 2.6: "Umlaufgeschwindigkeit eines Steins"

a) Die Kraft in der Schnur entspricht der Zentripetalkraft vom Betrag F_Z = 200 N.

$$F_z = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{F_z \cdot r}{m}} = 20 \text{ m/s}$$

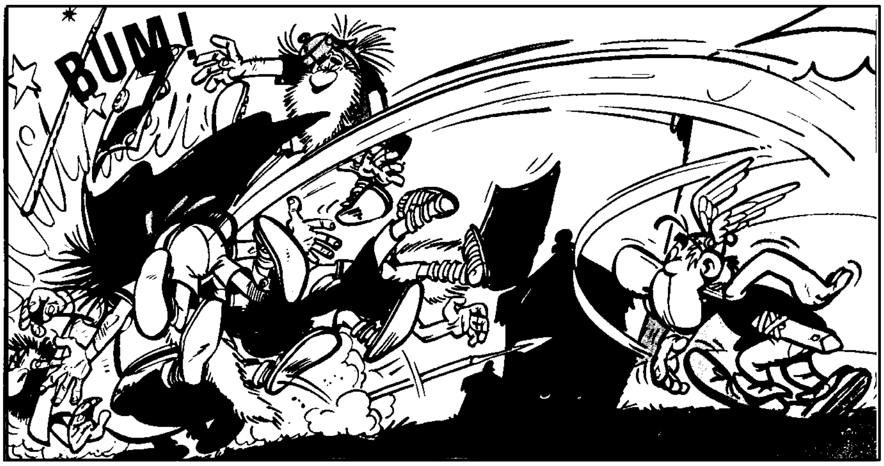
b) Für die Zentripetalkraft bei doppelter Geschwindigkeit v' = 2 v gilt:

$$F_z' = m\frac{v'^2}{r} = m\frac{(2v)^2}{r} = m\frac{4v^2}{r} = 4F_z = 800 \text{ N}$$

Wird der Radius r konstant gehalten, ist die vierfache Zentripetalkraft erforderlich.

c) Wenn die Schnur reisst, kann sie keine Kraft mehr auf den Stein ausüben. Damit wirkt plötzlich keine Zentripetalkraft mehr. Wie das Trägheitsgesetz besagt, bewegt sich der Körper dann mit seiner momentane Geschwindigkeit weiter. Diese ist tangential an die Kreisbahn und in dieser Richtung fliegt der Stein fort. (vgl. auch die "Funken am Schleifstein" von Aufgabe 2.3)

Übrigens: Dasselbe passiert auch mit dem bärtigen Römer im Bild des Titelblattes, wenn ihm Asterix seinen Wunsch erfüllt. Das nächste Bild aus "Asterix der Gallier" zeigt die Folgen:



Lösung 2.7: "Körper auf zwei verschiedenen Kreisbahnen"

a) $F_z = m\dfrac{v^2}{r}$ r = 0,5 m: $F_Z = 1{,}2$ N

r = 1,0 m: $F_Z = 0{,}6$ N

Bei gleichbleibender Bahngeschwindigkeit v wird beim doppelten Radius die Zentripetalkraft halb so gross.

b) Für die Umlaufzeit gilt: $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

$$F_z = m\omega^2 \cdot r = m \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot r$$

r = 0,5 m: $F_Z = 1{,}32$ N

r = 1,0 m: $F_Z = 2{,}63$ N

Bei gleichbleibender Umlaufszeit T bzw. gleicher Winkelgeschwindigkeit ω wird beim doppelten Radius die Zentripetalkraft doppelt so gross.

Lösung 2.8: "Impulsänderung und Zentripetalkraft"

Für den Betrag der Impulsänderung $\Delta\vec{p}$ entnimmt man der Skizze:

$$\Delta p = 2p \cdot \sin\frac{\Delta\varphi}{2}$$

Ist Δt genügend klein, so ist auch $\Delta\varphi$ sehr klein, so dass $\sin(\Delta\varphi/2) \approx (\Delta\varphi/2)$ also $\Delta p \approx p\,\Delta\varphi$

Mit $\Delta\varphi = \omega\,\Delta t$ und $p = m\,v$ folgt : $\Delta p = m\,v\,\omega\,\Delta t$

Einsetzen in $\Delta p = F\,\Delta t$ liefert: $m\,v\,\omega\,\Delta t = F\,\Delta t \Rightarrow F = m\,v\,\omega \Rightarrow$

$$F_z = m\frac{v^2}{r} = m\omega^2 \cdot r$$

Beispiele für Zentripetalkräfte

Übersicht

Sie wissen jetzt, dass ein Körper nur dann eine Kreisbewegung ausführen kann, wenn eine Zentripetalkraft auf ihn einwirkt. Wer oder was ist nun aber für diese Kraft verantwortlich?

In diesem Kapitel sollen Sie an mehreren Beispielen erfahren, dass es nicht etwa irgendwelche "zentripetalen Heinzelmännchen" sind, die am kreisenden Körper ziehen oder stossen. Es sind viel mehr so reale Kräfte wie die Normalkraft, Fadenkraft, Reibungskraft, Gewichtskraft oder eine Kombination von mehreren dieser Kräfte, welche die erforderliche Zentripetalkraft erzeugen.

Wir werden uns im Kapitel 3 vorerst auf Beispiele beschränken, bei welchen die auftretenden Kräfte parallel oder rechtwinklig zueinander sind, sodass wir sie in einem rechtwinkligen Koordinatensystem betrachten und relativ einfach berechnen können. Zudem werden Sie dabei eine Strategie zum Bearbeiten von Problemen mit Kreisbewegungen anwenden lernen.

Zum Abschluss können Sie - in einem fakultativen Additum - Ihre Kenntnisse bei einer Kreisbewegung anwenden, welche eigentlich nicht gleichförmig ist, aber mit Hilfe des Energiesatzes gut bearbeitet werden kann.

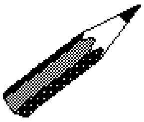
Lernziele für Kapitel 3

- Sie können bei verschiedenen Beispielen von kreisenden Körpern erklären, wie die Zentripetalkraft zustande kommt.

- Sie kennen eine gewisse "Lösungsstrategie" für Probleme mit Kreisbewegungen und verstehen sie anzuwenden.

3.1 Auf der Suche nach der Zentripetalkraft

Die Suche nach der Zentripetalkraft wollen wir anhand eines Minigolf-Spieles beispielhaft betrachten. Dabei nehmen wir Sir Isaac Newton als hilfreichen Begleiter mit, denn seine drei Gesetze oder Axiome werden uns gute Dienste leisten. Erinnern Sie sich noch an diese Axiome?



Aufgabe 3.1

Wie lauten die drei Newton-Axiome oder Newton-Gesetze? Sie heissen:

1. Trägheitsgesetz oder Beharrungsgesetz
2. Kraftwirkungsgesetz
3. Wechselwirkungsgesetz oder Reaktionsprinzip

Versuchen Sie vorerst zu diesen drei Namen eine Aussage aus dem Gedächtnis zu formulieren. Überprüfen Sie danach Ihre Lösung anhand Ihres Physikheftes oder Lehrbuches. Eine korrekte Formulierung finden Sie auch in den Lösungen am Schluss des Kapitels 3.

Betrachten wir nun eine Station des Minigolf-Parcours.

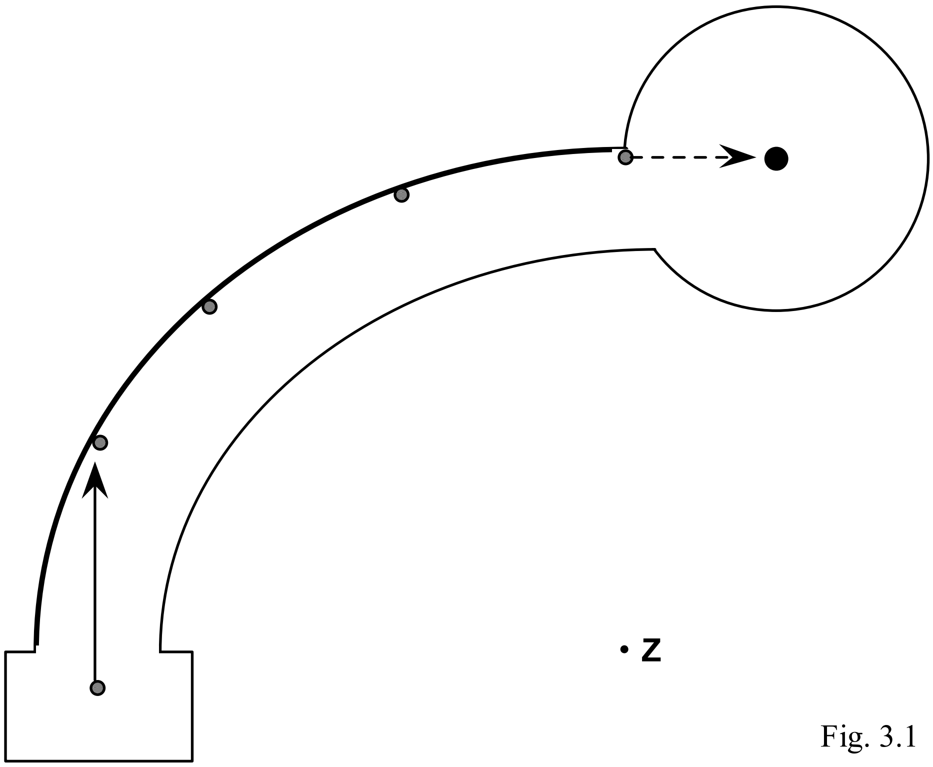


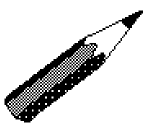
Fig. 3.1

Die fett gezeichnete Begrenzung der Bahn hat die Form eines Kreisausschnittes. Der Ball beschreibt somit entlang dieser Bande einen Teil einer Kreisbewegung. Dazu muss er eine Zentripetalkraft erfahren, welche gegen das Zentrum Z dieses Kreisbogens gerichtet ist.

Nach dem Schlag durch den Spieler bewegt sich der Ball vorerst geradlinig in Pfeilrichtung. Gemäss dem 1. Newton-Gesetz behält er dabei seine Geschwindigkeit bei, solange keine (resultierende) Kraft auf ihn einwirkt. Wenn wir die Reibung des Balles am Boden vernachlässigen, ist dies der Fall, bis der Ball auf die Bahnbegrenzung prallt. Bei diesem Aufprall übt der Ball auf den Rand eine Kraft aus. Das 3. Newton-Gesetz besagt nun, dass gleichzeitig auch der Rand auf den Ball eine gleichgrosse Kraft in entgegengesetzter Richtung ausübt. Der Ball erfährt dabei also eine resultierende Kraft, welche ihm (gemäss 2. Newton-Gesetz) eine Beschleunigung erteilt. Dadurch ändert die Ballgeschwindigkeit ihre Richtung. Diese neue Geschwindigkeit behält der Ball bei, bis er erneut auf die Bahnbegrenzung prallt. Bei diesem Aufprall...(Fortsetzung siehe oben!)

Die Kunst des guten Minigolf-Spielers liegt nun darin, den Schlag auf den Ball richtig zu dosieren. Die Geschwindigkeit soll genügend gross sein, dass die bei der obigen Betrachtung vernachlässigte aber selbstverständlich existierende Reibung den Ball nicht vor dem Erreichen des Loches zum Stillstand bringt. Andererseits sollte der Ball beim Aufprall auf die Begrenzung nicht zu heftig zurückgeworfen werden (er wird dabei auch abgebremst), sondern möglichst gleichmässig dem Rand folgen. Die einzelnen Richtungsänderungen der Geschwindigkeit sind dann nur minimal, und der Ball berührt den Rand praktisch dauernd. Die Kraft, welche die Begrenzung dabei dem Ball erteilt, steht rechtwinklig zum Rand, ist somit eine Normalkraft ("normal" bedeutet "rechtwinklig"). Sie zeigt dauernd zum Zentrum Z des Kreisbogens der Bande und erfüllt die Bedingung für die Richtung der Zentripetalkraft.

Hat aber diese Normalkraft auch den Betrag der für diese Kreisbewegung erforderlichen Zentripetalkraft? Was passiert, wenn der Spieler dem Ball beim Schlag eine grössere Geschwindigkeit erteilt, und der Ball infolgedessen den Kreisbogen schneller durchrollt? Die Zentripetalkraft muss dann ebenfalls grösser sein. (Falls Sie den Grund dafür nicht einsehen, schauen Sie im Kapitel 2.3.1. die Formel (2.19) nach.) Tatsächlich erfährt der Ball durch den Rand eine grössere Normalkraft, denn er prallt ja mit der grösseren Geschwindigkeit auch stärker auf die Bahnbegrenzung auf, erteilt dieser eine stärkere Kraft, die mit einer entsprechend grösseren Reaktionskraft beantwortet wird. Der Ball sorgt in gewissem Sinne selber dafür, dass die Normalkraft des Randes den für die Zentripetalkraft richtigen Betrag hat.



Aufgabe 3.2

Diskutieren Sie die Entstehung der Zentripetalkraft beim Minigolf-Posten für folgende Fälle:

a) Es wird ein Ball mit einer grösseren Masse auf derselben Anlage mit gleicher Geschwindigkeit gespielt.

b) Es wird derselbe Ball mit gleicher Geschwindigkeit gespielt, aber auf einer Anlage, bei der der Kreisbogen einen grösseren Radius hat.

Überlegen Sie sich, ob die Zentripetalkraft dabei grösser oder kleiner sein muss. Geben Sie danach eine zum letzten Absatz analoge Erklärung, wie diese veränderte Zentripetalkraft zustande kommt.

3.2 Eine "Lösungsstrategie"

Jetzt sollen Sie das zweite Lernziel ansteuern und eine Strategie zur Bearbeitung von Kreisbewegungen kennen lernen. Dies geschieht an einem Beispiel vom "Chilbiplatz". In einer ersten Phase werden Sie sich vorerst nochmals auf die Suche nach der Zentripetalkraft machen und die im letzten Abschnitt gewonnenen Erkenntnisse anwenden und festigen.

3.2.1 Die Zentripetalkraft im Zylinderkarussell

Die Leute stehen innen an der Wand einer zylinderförmigen Tonne, welche durch einen Motor in schnelle Drehung versetzt wird. Sie machen dabei eine Kreisbewegung um die Zylinderachse (Kreisradius r, Drehfrequenz f). Wie kommt hier die erforderliche Zentripetalkraft zustande?

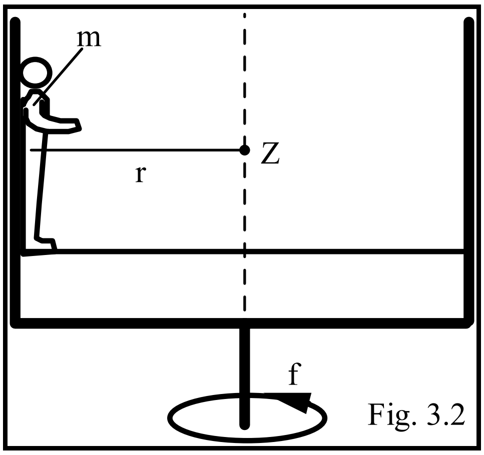
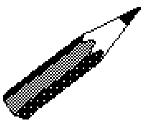


Fig. 3.2

Wir können die Situation mit derjenigen des Balles beim Minigolfspiel vergleichen. Hier erhalten aber die kreisende Passagiere ihre Geschwindigkeit nicht durch einen Schlag, sondern durch die rotierende Tonne, in welcher sich die Leute festhalten. Sie haben damit eine bestimmte Bahngeschwindigkeit, die in jedem Moment tangential zur Kreisbahn steht. Infolge ihrer Trägheit bewegen sich die Leute in diese Richtung bis sie eine Kraft erfahren (Newton I). Allerdings steht ihnen dabei augenblicklich die Wand im Weg, da diese gekrümmt ist und ebenfalls mitrotiert. Sie stossen damit sofort auf die Wand und üben auf diese eine Kraft aus.



Aufgabe 3.3

Fahren Sie mit der Erklärung fort und beschreiben Sie, wie die Zentripetalkraft auf die Karussell-Passagiere zustande kommt. Diskutieren Sie dann die Veränderung des Betrages der Zentripetalkraft für folgende Fälle:

a) Die Rotation erfolgt mit einer grösseren Frequenz.

b) Statt eines Kindes betrachten wir eine erwachsene Person mit grösserer Masse.

Vergleichen Sie Ihre Lösung mit derjenigen am Ende des Kapitels.

Mit der nachfolgenden Aufgabe sollen Sie ein Gefühl für die Grössenordnung der auftretenden Kräfte bekommen. Sie können - wenn Sie wollen - Ihre Lösungen der letzten Aufgabe auch quantitativ überprüfen, indem Sie die gegebenen Grössen entsprechend verändern.

Aufgabe 3.4

Ein 40 kg schweres Kind steht in einem Zylinderkarussell von 5 m Innendurchmesser an der Wand. Wie gross ist die Zentripetalkraft, wenn das Karussell in 3,0 s einen Umlauf macht?

Bevor wir uns mit diesem Karussell weiter beschäftigen, betrachten wir noch kurz ein entsprechendes Beispiel bei einer überaus nützlichen Einrichtung, der Wäscheschleuder. Statt Personen werden dort nasse Textilien in der zylinderförmigen Tonne in Rotation versetzt, wobei die Wand mit vielen Löchern versehen ist.

Aufgabe 3.5

Erklären Sie den Zweck und die Funktionsweise der Wäscheschleuder.

3.2.2 Wenn man den Boden unter den Füssen verliert...

In der bis jetzt betrachteten Form ist das Zylinderkarussell nicht besonders originell. Der "Gag" ist nun aber, dass bei genügend schneller Drehung der Boden abgesenkt werden kann und die Passagiere dann an der Wand hängen. Dies ist nur möglich, wenn zwischen Rücken und Wand eine genügend grosse Haftreibung besteht. Für den Karussellbesitzer stellen sich folgende Fragen:

- Mit welcher Drehfrequenz f muss die Tonne von gegebenem Radius r rotieren, bis der Boden abgesenkt werden kann?
- Muss man sich dabei an den leichtesten Kindern oder an den schwersten Erwachsenen orientieren?

An diesem Problem wollen wir nun eine **"Lösungsstrategie"** entwickeln.

1. Schritt: Übersicht.

Skizze mit dem kreisenden Körper, dem Kreiszentrum Z, den gegebenen und gesuchten Grössen.

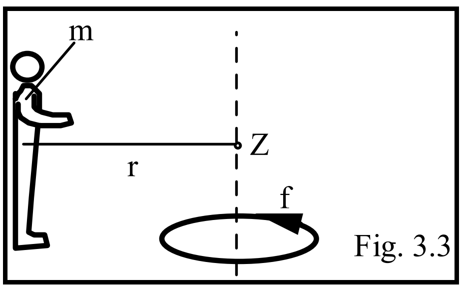


Fig. 3.3

Gegeben: Masse m
Radius r

Gesucht: Drehfrequenz f

2. Schritt: Kraftvektoren

Man zeichnet in der Skizze alle Kräfte ein, die am kreisenden Körper angreifen. Überprüfen Sie dabei sorgfältig, ob alle eingezeichneten Kräfte wirklich an diesem Körper - und nicht an einem andern - angreifen. Sie können dies tun, indem Sie sich bei jeder Kraft folgende Fragen stellen:

a) Wo ist der Angriffspunkt der Kraft? (Er muss irgendwo auf dem kreisenden Körper liegen!)

b) Wer oder was ist für die Entstehung diese Kraft verantwortlich? (Es muss irgend ein anderer Körper sein! Ein Körper kann nicht auf sich selbst eine Kraft ausüben.)

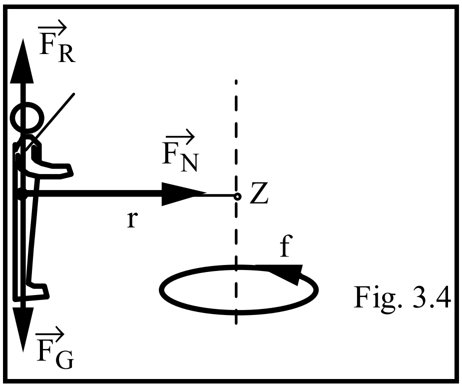


Fig. 3.4

Nach dem Absenken des Bodens wirken auf die Person folgende Kräfte:

- Gewichtskraft $\vec{F_G}$ (greift am Schwerpunkt der Person an und wird durch die Erde ausgeübt)
- Normalkraft $\vec{F_N}$ (greift am Rücken der Person an und wird durch die Wand ausgeübt)
- Haftreibungskraft $\vec{F_R}$ (greift am Rücken der Person an und wird durch die Wand ausgeübt)

[Vor dem Absenken des Bodens übt der Boden eine Bodennormalkraft aus, welche an den Fußsohlen der Person angreift und nach oben gerichtet ist. Wenn diese dann nach dem Absenken des Bodens nicht mehr auf die Person wirken kann, muss die Haftreibungskraft $\vec{F_R}$ ihre Rolle übernehmen.]

Wo aber ist die Zentripetalkraft? Gemäss Kapitel 2.3 ist die Zentripetalkraft diejenige Kraft, welche die Beschleunigung erzeugt, also die **Resultierende** aller am kreisenden Körper angreifenden Kräfte (2. Newton-Gesetz):

$$\vec{F_Z} = \vec{F_{res}} = \vec{F_G} + \vec{F_R} + \vec{F_N} \tag{3.1}$$

Diese muss zum Kreiszentrum Z, in unserem Beispiel also horizontal gerichtet sein. Wie aus der Figur 3.4 ersichtlich ist, ist dies nur möglich, wenn die beiden vertikalen Kräfte sich gegenseitig aufheben. Sie müssen also entgegengesetzt gleich gross sein:

$$\vec{F_G} = -\vec{F_R} \tag{3.2}$$

Setzt man (3.2) in Gleichung (3.1.) ein, so ergibt sich daraus:

$$\vec{F_Z} = \vec{F_{res}} = \vec{F_N} \tag{3.3}$$

Damit wird die im ersten Teil dieses Kapitels gewonnene Erkenntnis bestätigt:
Die Normalkraft der Wand liefert in diesem Beispiel die Zentripetalkraft.

3. Schritt: Beträge der Kräfte

Mit welchen Gesetzmässigkeiten lassen sich die Beträge der Kräfte berechnen?

Gewichtskraft $F_G = m \cdot g$ (g = Erdbeschleunigung) (3.4)

Haftreibungskraft $F_R \leq \mu_H \cdot F_N$ (3.5)

Zentripetalkraft $F_Z = m \cdot \omega^2 \cdot r = m \cdot (2\pi f)^2 \cdot r$ (3.6)

Falls Sie mit den Gleichungen (3.4) und (3.5) Mühe haben, konsultieren Sie die DMK/DPK-Formelsammlung auf Seite 143. Für Gleichung (3.6) orientieren Sie sich an den Gleichungen (1.12) und (2.19) in diesem Leitprogramm.

4. Schritt: Verknüpfung und Lösung

Formuliert man die Aussagen über die Kraftvektoren (2. Schritt) als Bedingungen für deren Beträge und berücksichtigt die Gesetzmässigkeiten für die Berechnung dieser Beträge (3. Schritt), so erhält man eine mathematische Beziehung zwischen der gesuchten und den gegebenen Grössen, die schliesslich zur Lösung führt.

Aus (3.2) folgt für die Beträge $F_G = F_R$. Setzt man hier (3.4) und (3.5) ein, ergibt dies:

$$m \cdot g \leq \mu_H \cdot F_N \qquad (3.7)$$

Aus (3.3) ergibt sich $F_N = F_Z$ und mit Einsetzen von (3.6):

$$F_N = m \cdot (2\pi f)^2 \cdot r \qquad (3.8)$$

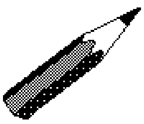
Setz man diese Beziehung in (3.7) ein, bekommt man:

$$m \cdot g \leq \mu_H \cdot m \cdot (2\pi f)^2 \cdot r \qquad (3.9)$$

Auflösen nach der gesuchten Drehfrequenz f ergibt:

$$f \geq \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\mu_H \cdot r}} \qquad (3.10)$$

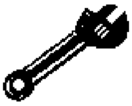
Wir sehen, dass der Boden erst bei einer Frequenz, welche grösser oder gleich einem bestimmten Grenzwert ist, abgesenkt werden darf. Im weiteren benötigen wir zur Berechnung der Grenzfrequenz die Haftreibungszahl μ_H zwischen der Wand und dem Rücken der Passagiere. Je kleiner diese Zahl ist, desto schlechter haften die Leute an der Wand, desto grösser muss die Grenzfrequenz sein (μ_H steht im Nenner). Um kein Risiko einzugehen, muss mit demjenigen Material gerechnet werden, das die kleinste Haftreibungszahl aufweist.



Aufgabe 3.6

Beantworten Sie die zweite Frage des Karussellbesitzers bei der Problemstellung zu Beginn des Kap. 3.2.2.(Kind oder Erwachsener)

3.2.3 Experimentelle Überprüfung

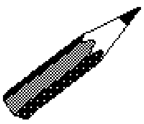


Experiment 3.1.
Sie können nun mit einem Modell Karussellbesitzer spielen. Es ist dabei von Vorteil, wenn Sie dieses Experiment zu zweit durchführen können. Schauen Sie sich also nach einer Partnerin oder einem Partner um.

a) Durchführung

Stellen Sie auf den angehobenen Boden zwei Püppchen an die Wand des Plexiglaszylinders. Versetzen Sie dann dieses Karussell in Rotation (Anleitung beachten). Wenn Sie das Gefühl haben, die Drehung sei schnell genug, senken Sie den Boden ab. Reduzieren Sie dann die Drehgeschwindigkeit langsam und beobachten Sie die Püppchen. Erklären Sie Ihrer Partnerin oder Ihrem Partner das Verhalten der Püppchen. Begründen Sie insbesondere, warum die beiden Püppchen sich nicht genau gleich verhalten

b) Messung und Auswertung



Aufgabe 3.7
Bestimmen Sie in einem zweiten Durchgang des Experimentes die Drehfrequenz, bei welcher die Püppchen von der Wand hinuntergleiten. Es steht Ihnen dafür eine Stoppuhr zur Verfügung. Mit dem Maßstab können Sie den Radius des Zylinders messen. Ermitteln Sie aus diesen gemessenen Grössen die Haftreibungszahl zwischen der Plexiglaswand und dem Rücken der Püppchen.

(Versuchen Sie die Messgrössen so genau wie möglich zu bestimmen. Schätzen Sie aber auch die Genauigkeit des Resultates ab.)

Bestätigt Ihre Messung und Auswertung Ihre Begründung für das unterschiedliche Verhalten der beiden Püppchen?

3.3 Das Auto in der Kurve

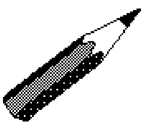
Wer oder was hält ein Auto in der Kurve auf der Kreisbahn? Wer schon einmal im Winter von einer vereisten Strasse überrascht wurde, kennt die Antwort. Wir wollen aber auch hier die Entstehung der Zentripetalkraft etwas genauer anschauen. Danach können Sie die im letzten Kapitel gelernte Lösungsstrategie bei der Bearbeitung einer Aufgabe anwenden.

3.3.1 Die Zentripetalkraft bei der Kurvenfahrt

Ein Auto fährt mit einer gewissen Geschwindigkeit in die Kurve. Der Fahrer stellt nun mit dem Steuer die Räder schräg zur anfänglichen Fahrtrichtung. Gemäss dem Trägheitsgesetz (Newton I) bewegt sich das Auto geradlinig weiter, bis es durch eine resultierende Kraft zu einer Geschwindigkeitsänderung gezwungen wird. Bei dieser vorerst noch geradlinigen Bewegung "verhaken" sich die schräg gestellten Reifen mit den Unebenheiten des Strassenbelags und üben auf diese eine Kraft aus. Aufgrund des Wechselwirkungsgesetzes (Newton III) wirkt eine Gegenkraft vom Strassenbelag auf die Reifen. Durch diese Kraft wird das Auto gegen das Zentrum des Kurvenbogens beschleunigt (Newton II) und es beschreibt eine Kreisbahn. Die Zentripetalkraft wird hier also durch die seitlich auf die Räder wirkende Haftreibungkraft erzeugt. Schlagen Sie in der Handbibliothek das Buch Dorn-Bader, Physik in einem Band auf Seite 304 auf. Bild 304.2 gibt Ihnen einen guten Eindruck von dieser Kraft.

3.3.2 Grenzen der Kurvenfahrt

Für die Haftreibungskraft gibt es einen oberen Grenzwert, der vom Reifenprofil und der Beschaffenheit des Strassenbelags abhängt. Die massgebende Haftreibungszahl ist für eine vereiste Strasse und abgefahrene "Finken" eben viel kleiner als für eine trockene, griffige Strasse und neue Reifen mit gutem Profil.



Aufgabe 3.8: "Auto im Kreisel"
Ein Automobilist will sein Fahrzeug von 800 kg mit der Innerortsgeschwindigkeit 50 km/h durch einen Kreisel steuern, dessen Radius 12 m beträgt. Welche Bedingung stellt dies an die Haftreibungszahl μ_H? Ist dieser Wert realistisch? Welchen Einfluss hat die Masse des Autos auf das Resultat?

Bei der Bearbeitung dieser Aufgaben sollen Sie nun die Lösungsstrategie von Kapitel 3.2 anwenden. Das Leitprogramm gibt Ihnen nachfolgend einige Hilfen. Schreiben oder zeichnen Sie aber nicht ins Leitprogramm, verwenden Sie Ihr eigenes Heft oder ein Arbeitsblatt.

1. Schritt: Übersicht

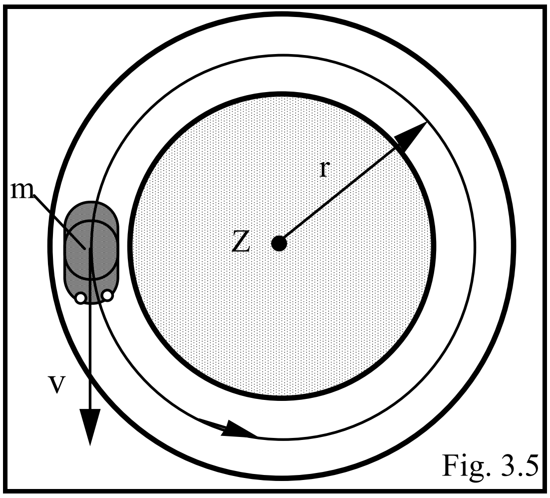


Fig. 3.5

Geg:

Ges:

2. Schritt: Kraftvektoren

Für das Einzeichnen der Kraftvektoren eignet sich die Ansicht von vorne besser. Zudem wollen wir das Auto als Massenpunkt betrachten. Dann haben wir für alle Kräfte denselben Angriffspunkt. Überlegen Sie sich aber bei der Suche nach den wirkenden Kräften gleichwohl, an welchen Stellen des Autos die einzelnen Kräfte tatsächlich angreifen.

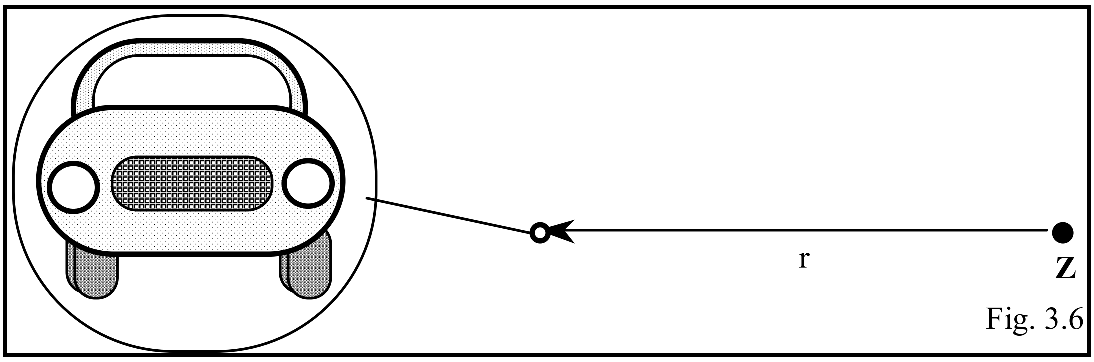


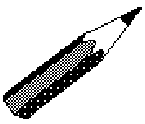
Fig. 3.6

3. Schritt: Beträge der Kräfte

Konsultieren Sie allenfalls die DMK/DPK- Formelsammlung.

4. Schritt: Verknüpfung und Lösung

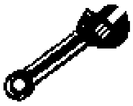
Die korrekte Lösung finden Sie am Schluss des Kapitels. Falls Sie beim 2. oder 3. Schritt Schwierigkeiten hatten, studieren Sie vorerst nur die dort dargestellte Teillösung und versuchen Sie danach beim folgenden Schritt selber weiterzukommen.



Aufgabe 3.9: "Kurve schneiden"

Warum schneiden "rasante" Fahrer die Kurve? Geben Sie vorerst eine Antwort in Worten, begründen Sie sie danach auch mit mathematischen Hilfsmitteln

3.4 Die Zwei-Körper-Drehung



Experiment 3.2.
Auf dem Tisch steht eine Handkurbel mit folgendem Aufsatz:

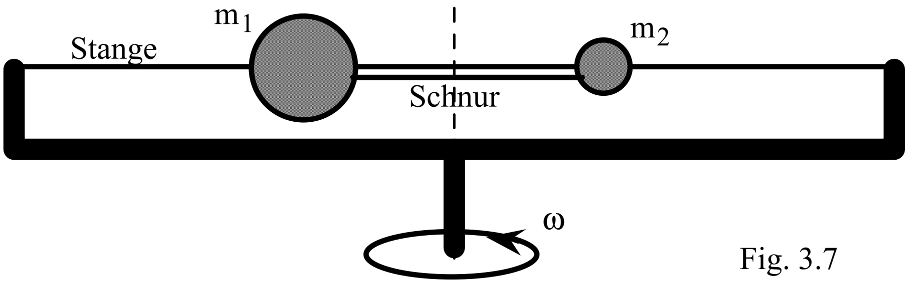
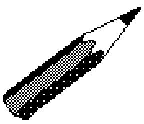


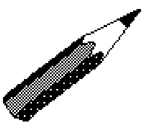
Fig. 3.7

Die beiden Holzkugeln sind durch eine Schnur miteinander verbunden und können auf der Stange gleiten. Über die Schnur können die beiden Kugeln miteinander in Wechselwirkung treten und somit bei der Rotation des Gestelles gegenseitig aufeinander die erforderliche Zentripetalkraft ausüben. Dies ist allerdings nur bei einer ganz bestimmten Position der Kugeln möglich.

Suchen Sie diese Position und lassen Sie das Gestell mit zunehmender Winkelgeschwindigkeit rotieren. (Bei kleiner Drehfrequenz vermag die Reibung die Kugeln auch dann noch im Gleichgewicht halten, wenn ihre Position nicht exakt stimmt.)



Aufgabe 3.10: "Verbundene Kugeln"
Machen Sie für zwei Kugeln mit gegebenen Massen m_1 und m_2 eine Aussage über die "richtige Position" der Kugeln. Formulieren Sie dies auch als eine mathematische Beziehung. Die richtige Lösung finden Sie im letzten Abschnitt dieses Kapitels.



Aufgabe 3.11: "Mond und Erde"
Die Mondmasse ist 1/81 der Erdmasse, der Abstand der Mittelpunkte beider Körper beträgt 384'000 km (r). Wo liegt das gemeinsame Zentrum der Kreisbahnen von Erd- und Mondmittelpunkt? (Vergleich mit dem Erdradius)

(Läuchli/Müller S. 112, A4-401)

3.5 Der vertikale Kreis

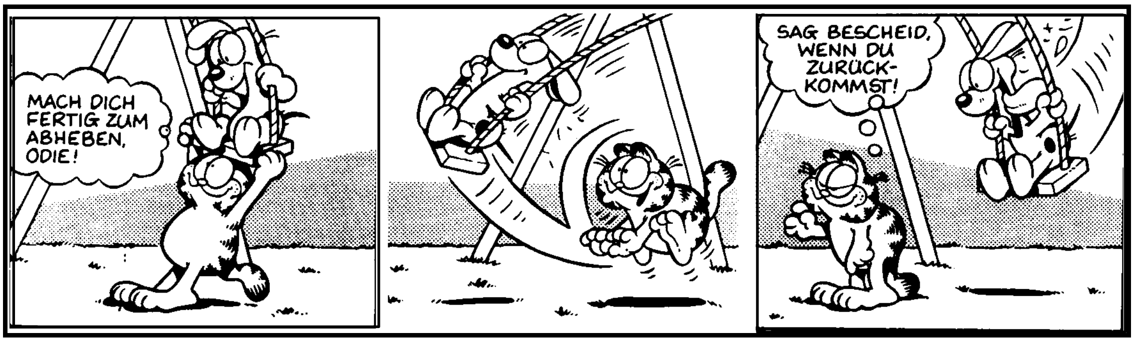
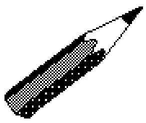


Fig. 3.8

Diese Comic-Geschichte enthält zwei Kreisbewegungen: Diejenige, welche der Hund Odie auf der Schaukel tatsächlich ausführt, sowie eine Flugbahn, wie sie sich Garfield vorstellt: eine Reise um die Erde herum. Die zweiten sollten Sie mit der bekannten Lösungsstrategie ohne grosse Schwierigkeiten bearbeiten können. Bei der ersten handelt es sich gar nicht um eine gleichförmige Kreisbewegung, doch werden wir gewisse Kenntnisse trotzdem anwenden können.



Aufgabe 3.12: "Odies Flug durchs All"

a) Welche horizontale Abschussgeschwindigkeit v müsste Garfield seinem Kollegen Odie erteilen, damit dieser eine gleichmässige Kreisbewegung um die Erde herum ausführen würde? (Wir nehmen dabei an, dass keinerlei Hindernisse im Weg stehen und auch kein bremsender Luftwiderstand existiere.) Für den Radius der Kreisbahn kann der Erdradius von 6'370 km eingesetzt werden.

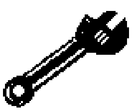
b) Welches ist die Ursache der Zentripetalkraft, welche Odie auf die beschriebene Kreisbahn zwingt? Welcher Körper ist dafür verantwortlich?

c) Wie gross ist die Beschleunigung, die Odie durch diese Zentripetalkraft erfährt?

d) Wo greift die gemäss Wechselwirkungsgesetz (Newton III) wirkende Gegenkraft zur Zentripetalkraft an?

e) Nach welcher Zeit hätte Odie die Erde einmal umkreist?

Die Lösungen finden Sie am Schluss des Kapitels.



Experiment 3.3.

Die Kreisbewegung von Odie auf dem "Rittiseili" können Sie nun mit einem an einer Schnur befestigten Tennisball nachahmen. Variieren Sie den Anstoss im tiefsten Punkt in seiner Stärke. Was beobachten Sie? Vergleichen Sie die Geschwindigkeiten im höchsten und im tiefsten Punkt der Kreisbahn. Formulieren Sie eine Bedingung dafür, dass der Ball im höchsten Punkt einen Kreis mit gestreckter Schnur beschreibt.

Haben Sie es geschafft, den Ball im tiefsten Punkt so stark anzustossen, dass die Schnur auch im höchsten Punkt gespannt war? Natürlich ist die Geschwindigkeit im höchsten Punkt kleiner als im tiefsten, denn beim Aufstieg nimmt die potentielle Energie des Balles zu, während gleichzeitig seine kinetische Energie abnimmt. Allerdings darf die Geschwindigkeit im höchsten Punkt nicht null werden, wenn der Ball dort eine Kreisbewegung ausführen soll. Die Bedingung für die gestreckte Schnur wollen wir nun durch eine Analyse der Kräfte erarbeiten.

im höchsten Punkt

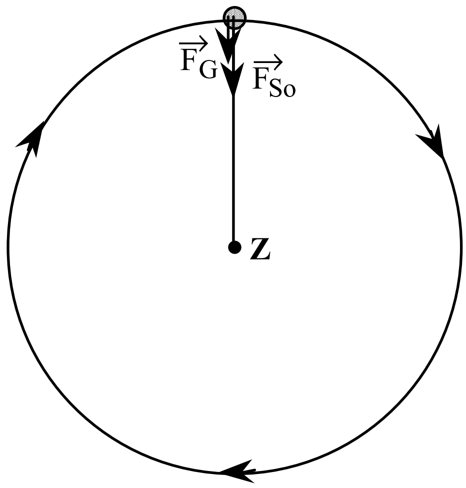


Fig. 3.9 a

im tiefsten Punkt

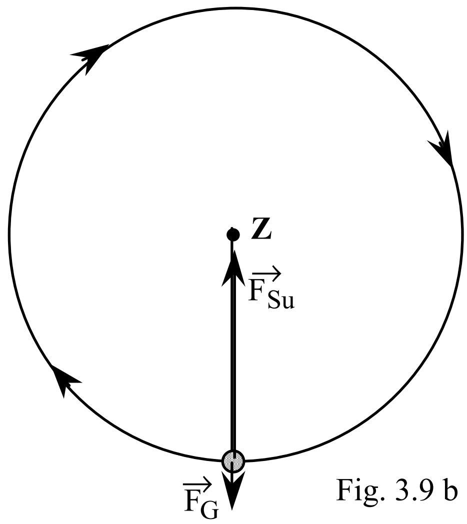


Fig. 3.9 b

Auf den kreisenden Ball wirken zwei Kräfte:

- die Gewichtskraft $\overrightarrow{F_G}$ (vertikal nach unten, durch die Erde)

- die Schnurkraft $\vec{F}_S$ (längs der Schnur zum Zentrum, durch die Schnur)

Die Resultierende dieser beiden Kräfte ist die Zentripetalkraft: $\overrightarrow{F_Z} = \overrightarrow{F_{res}} = \overrightarrow{F_S} + \overrightarrow{F_G}$ jeweils zum Zentrum Z.

Wenn man die Richtung mit dem Vorzeichen berücksichtigt, ergibt dies:

im höchsten Punkt:

$F_{Zo} = F_{So} + F_G$ nach unten

Bei der Erzeugung der Zentripetalkraft wird die Seilkraft durch die Gewichtskraft unterstützt.

im tiefsten Punkt:

$F_{Zu} = F_{Su} - F_G$ nach oben

Bei der Erzeugung der Zentripetalkraft wird die Seilkraft durch die Gewichtskraft vermindert.

Anders formuliert:

Im höchsten Punkt muss das Seil nur soviel zur Zentripetalkraft beitragen, wie die Gewichtskraft alleine nicht liefern kann.

$F_{So} = F_{Zo} - F_G$

Im tiefsten Punkt muss die Seilkraft einerseits die nötige Zentripetalkraft erzeugen und zudem noch die Gewichtskraft ausgleichen: $F_{Su} = F_{Zu} + F_G$

Wählen wir nun die Geschwindigkeit im höchsten Punkt immer kleiner, so wird die erforderliche Zentripetalkraft F_Z und die Seilkraft F_S ebenfalls immer kleiner. Schliesslich wird diese Seilkraft null und die Zentripetalkraft wird alleine durch die Gewichtskraft erzeugt. Dann gilt : $F_{So} = 0$ und $F_{Zo} = F_G$. Diese Gleichung bestimmt die kleinste Geschwindigkeit im höchsten Punkt, bei welcher die Kreisbahn mit gestreckter Schnur durchlaufen wird.

In der nächsten Aufgabe können Sie diese Grenzgeschwindigkeit für Odie auf der Schaukel berechnen. Die Bestimmung der Anstossgeschwindigkeit im tiefsten Punkt ist etwas anspruchsvoller, ist aber mit dem Energiesatz lösbar. Die Teilaufgaben 3.13 b) und c) sind deshalb als fakultatives Additum gedacht. Mit Aufgabe 3.14. können Sie überprüfen, ob Sie die oben angestellten Überlegung soweit verstanden haben, dass Sie sie bei einem andern Problem anwenden können. Danach können Sie sich zum Kapiteltest melden.

Aufgabe 3.13: "Odies Looping auf der Schaukel"

Annahmen: Odies Masse 8 kg, Seillänge 3 m,
keine Reibung, kein Luftwiderstand

a) Welche Geschwindigkeit muss Odie im höchsten Punkt mindestens haben, damit er einen Kreisbogen mit gestreckten Seilen beschreibt?

b) Wie gross muss dazu die Geschwindigkeit im tiefsten Punkt sein?

c) Wie gross ist die Kraft der Seile im tiefsten Punkt?

Aufgabe 3.14: "Skifahrer"

a) Ein Skifahrer durchfährt eine Mulde und beschreibt somit auf einem gewissen Wegstück einen vertikalen Kreis. Welche Kräfte wirken dabei auf den Skifahrer? Wie wird die Zentripetalkraft erzeugt? Was verspürt der Skifahrer, wenn er eine stärker gekrümmt Mulde mit derselben Geschwindigkeit durchfährt? Erklären Sie diese Wahrnehmung mit Hilfe der wirkenden Kräfte.

b) Diskutieren Sie in gleicher Weise die Kräfte auf den Skifahrer, der über eine Kuppe fährt. Was passiert, wenn seine Geschwindigkeit immer grösser gewählt wird?

Lösungen und Hinweise zu den Aufgaben

Lösung 3.1: "Die drei Newton-Gesetze"

1. Trägheitsgesetz oder Beharrungsgesetz:
Ein Körper, auf den keine Kraft wirkt, ändert seine Geschwindigkeit nicht. Er verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmig geradlinigen Bewegung

2. Kraftwirkungsgesetz
Die beschleunigende Kraft $\vec{F}$ ist das Produkt aus der beschleunigten Masse m und der Beschleunigung : $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$
Diese Kraft ist die Resultierende der von aussen einwirkenden Kräfte und ist die Ursache der Beschleunigung.

3. Wechselwirkungsgesetz (actio = reactio)
Übt ein Körper A auf einen Körper B eine Kraft $\overrightarrow{F_A}$ aus, übt gleichzeitig auch der Körper B auf den Körper A eine Kraft $\overrightarrow{F_B}$ aus, die von gleichem Betrag aber entgegengesetzter Richtung ist.: $\overrightarrow{F_A} = -\overrightarrow{F_B}$

Lösung 3.2

Für die Zentripetalkraft gilt (Gleichung 2.19): $F_Z = \frac{m \cdot v^2}{r}$

a) Ein Ball mit grösserer Masse m braucht bei gleicher Geschwindigkeit v auf der gleichen Anlage (gleicher Radius r) eine grössere Zentripetalkraft (Masse m im Zähler).
Der Ball mit grösserer Masse hat eine grössere Trägheit. Er prallt somit stärker auf die Bahnbegrenzung auf, erteilt dieser eine stärkere Kraft, die mit einer entsprechend grösseren Reaktionskraft beantwortet wird. Die grössere Masse erfährt somit eine grössere Zentripetalkraft in Form der grösseren Normalkraft vom Rand.
Die dadurch hervorgerufene Beschleunigung a_Z ist jedoch bei beiden Bällen gleich gross, da bei der Rechnung $a_Z = F_Z /m$ die grössere Kraft durch die grössere Masse geteilt wird. Der Ball durchläuft die gleiche Kreisbahn mit gleicher Geschwindigkeit, erfährt somit dieselbe Zentripetalbeschleunigung.
b) Bei einer Anlage mit grösserem Radius r benötigt der gleiche Ball (m = konst) bei gleicher Geschwindigkeit v eine kleinere Zentripetalkraft (Radius r im Nenner).
Der Ball trifft bei grösserem Radius flacher auf die Bahnbegrenzung und prallt damit weniger stark auf. Er erteilt dem Rand eine schwächere Kraft, die mit einer entsprechend kleineren Reaktionskraft beantwortet wird. Bei grösserem Radius erfährt der gleiche Ball somit eine kleinere Zentripetalkraft in Form der kleineren Normalkraft vom Rand.
Auch die Beschleunigung ist kleiner. Bei gleicher Geschwindigkeit muss die Richtung im Bogen mit grösserem Radius weniger geändert werden.

Lösung 3.3

Das 3. Newton-Gesetz besagt nun, dass gleichzeitig auch die Wand auf den Passagier eine gleichgrosse Kraft in entgegengesetzter Richtung ausübt. Der Passagier erfährt dabei also eine resultierende Kraft, welche ihm (gemäss 2. Newton-Gesetz) eine Beschleunigung erteilt. Dadurch ändert seine Geschwindigkeit ihre Richtung. Diese neue Geschwindigkeit behält er bei, bis er erneut auf die Wand stösst. ..(Fortsetzung siehe oben!)

a) Bei grösserer Frequenz ist die Bewegungsgeschwindigkeit der Passagiere grösser. Die Zentripetalkraft muss dann ebenfalls grösser sein (Gleichung 2.19, Geschwindigkeit v im Zähler). Tatsächlich erfährt der Passagier durch die Wand eine grössere Normalkraft, denn er stösst ja mit der grösseren Geschwindigkeit auch stärker auf die Wand, erteilt dieser eine stärkere Kraft, die mit einer entsprechend grösseren Reaktionskraft beantwortet wird. Diese grössere Zentripetalkraft erteilt dem gleichen Passagier eine grössere Beschleunigung, sodass er die für die grössere Geschwindigkeit nötige grössere Geschwindigkeitsänderung erfährt und die gleiche Kreisbahn durchlaufen kann.

b) Ein Passagier mit grösserer Masse m braucht bei gleicher Geschwindigkeit v bei gleichem Radius r eine grössere Zentripetalkraft (Masse m im Zähler).

Der Erwachsene mit grösserer Masse hat eine grössere Trägheit. Er drückt somit stärker auf die Wand, erteilt dieser eine stärkere Kraft, die mit einer entsprechend grösseren Reaktionskraft beantwortet wird. Die grössere Masse erfährt somit eine grössere Zentripetalkraft in Form der grösseren Normalkraft vom der Wand.

Die dadurch hervorgerufene Beschleunigung a_Z ist jedoch beim Kind und bei der erwachsenen Person gleich gross, da bei der Rechnung $a_Z = F_Z /m$ die grössere Kraft durch die grössere Masse geteilt wird. Beide Personen durchlaufen ja die gleiche Kreisbahn mit gleicher Geschwindigkeit, erfahren somit dieselbe Zentripetalbeschleunigung.

Lösung 3.4

Gegeben: m = 40 kg; d = 2r = 5 m $\Rightarrow$ r = 2.5 m; T = 3.0 s Gesucht: F_Z

(1.12) $\omega = 2\pi f = \dfrac{2\pi}{T}$

(2.19) $F_z = m \cdot \omega^2 \cdot r = m \cdot (2\pi f)^2 \cdot r = m \cdot (\dfrac{2\pi}{30s})^2 \cdot 25m = 439N$

Lösung 3.5

Der Zweck der Wäscheschleuder ist, den Textilien möglichst viel Wasser zu entziehen. Dies geschieht durch die Rotation der Trommel. Die nasse Wäsche bewegt sich gemäss Trägheitsgesetz in Richtung ihrer Geschwindigkeit, d.h. tangential zum Kreis. Die Textilien stossen dabei auf die Trommelwand und erfahren dort eine Kraft, welche die Geschwindigkeitsrichtung so ändert, dass sie die Kreisbahn durchlaufen. Das flüssige Wasser kann jedoch durch die Löcher in der Wand seine tangentiale Bewegungsrichtung beibehalten und fliegt durch die gelochte Zylinderwand in das die Trommel umgebende Gefäss.

Lösung 3.6

Gleichung (3.10) zeigt, dass die Grenzfrequenz unabhängig von der Masse m der Passagiere ist. Sie ist also für das leichteste Kind gleich gross wie für den schwersten Erwachsenen, sofern ihre Kleider dieselbe Haftreibungszahl haben.

Die Person mit grösserer Masse drückt wegen ihrer grösseren Trägheit stärker auf die Wand und erfährt damit auch eine grössere Normalkraft. Infolgedessen ist auch die maximale Haftreibungskraft grösser, welche die im gleichen Verhältnis grössere Gewichtskraft tragen kann.

Lösung 3.7

Mit der Uhr misst man die Zeit t für mehrere Umläufe (z.B. n =10) und bestimmt daraus die Frequenz f = n/t. Mit dem Maßstab kann man den Durchmesser recht genau messen und daraus den Radius r berechnen. Löst man Gleichung (3.9) nach der Haftreibungszahl auf, ergibt dies: $\mu_H \geq \frac{g}{(2\pi f)^2 \cdot r}$

Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit Haftreibungszahlen in der DMK/DPK-Formelsammlung S. 170 oder in Dorn-Bader: Physik in einem Band S. 258.

Wenn die zwei Püppchen nicht bei der gleichen Frequenz hinunterrutschen, ist dies auf unterschiedliche Reibungszahlen μ_H zwischen Wand und Püppchen zurückzuführen. Je kleiner die Haftreibungszahl, desto grösser ist die Grenzfrequenz, bei welcher die Passagiere nicht mehr haften.

Lösung 3.8: "Auto im Kreisel"

1. Schritt:

Geg: m = 800 kg; v = 50 km/h = 13.9 m/s; r = 12 m. Ges: Haftreibungszahl μ_H

2. Schritt

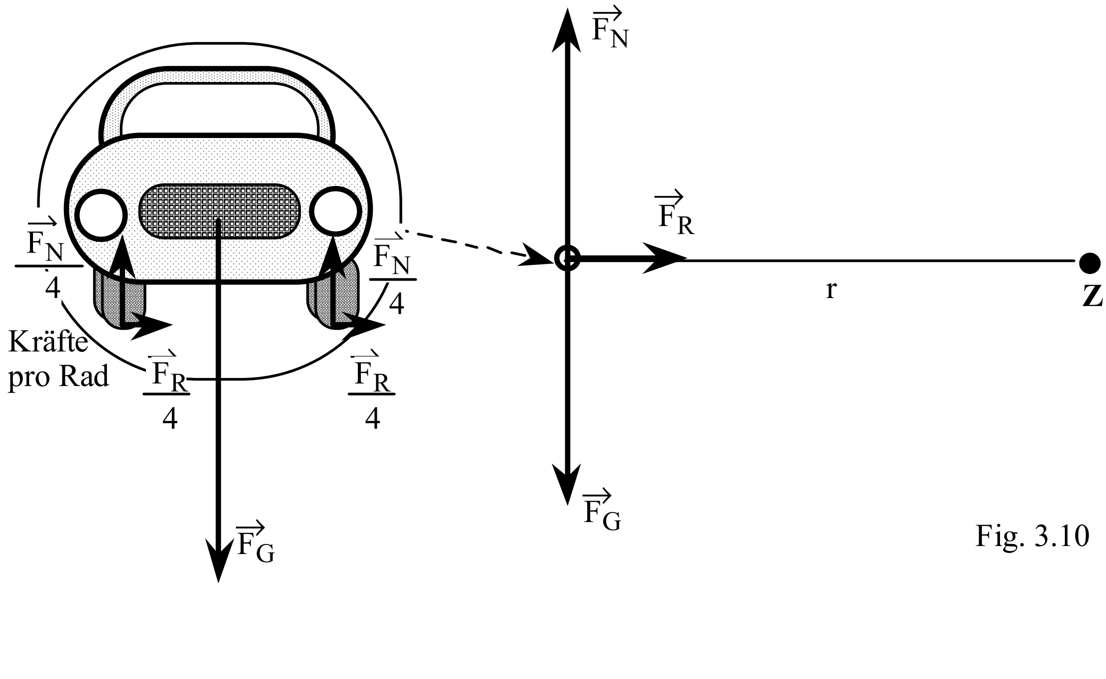


Fig. 3.10

Kräfte: Gewichtskraft $\overrightarrow{F_G}$

gesamte Normalkraft $\overrightarrow{F_N}$

gesamte seitliche Haftreibungskraft $\overrightarrow{F_R}$

Resultierende: $\overrightarrow{F_{res}} = \overrightarrow{F_G} + \overrightarrow{F_N} + \overrightarrow{F_R}$, wobei $\overrightarrow{F_G} + \overrightarrow{F_N} = 0$, da keine vertikale Beschleunigung.

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{F_{res}} = \overrightarrow{F_R}$$

Die Zentripetalkraft ist die Resultierende, hier also gleich der Reibungskraft: $\overrightarrow{F_Z} = \overrightarrow{F_{res}} = \overrightarrow{F_R}$

3. Schritt

Gewichtskraft $F_G = m \cdot g$

gesamte seitliche Haftreibungskraft $F_R \leq \mu_H \cdot F_N$

Zentripetalkraft $F_Z = \dfrac{m \cdot v^2}{r}$

4. Schritt

$$F_Z \leq F_R \Rightarrow \frac{m \cdot v^2}{r} \leq \mu_H \cdot F_N$$

$$F_N = F_G \Rightarrow F_N = m \cdot g \Rightarrow \frac{m \cdot v^2}{r} \leq \mu_H \cdot m \cdot g$$

Aufgelöst nach der Haftreibungszahl: $\mu_H \geq \dfrac{v^2}{r \cdot g} = 16$ (g = 10 m/s^2)

In DMK/DPK Formeln und Tafeln S. 170 ist für Pneu auf trockener Asphaltstrasse eine Haftreibungszahl von 1.0 angegeben. Die gegebene Geschwindigkeit ist somit zu gross. Der zulässige Maximalwert ist (bei trockener Strasse)

$$v \leq \sqrt{\mu_H \cdot g \cdot r} \approx 11 \frac{m}{s} \approx 40 \text{ km/h}$$

Die Masse des Autos spielt dabei keine Rolle! Eine grössere Masse benötigt zwar eine grössere Zentripetalkraft. Bei der grösseren Masse ist aber die Gewichtskraft und die Normalkraft grösser, was eine im gleichen Verhältnis grössere Reibungskraft ermöglicht.

Lösung 3.9: "Kurve schneiden"

Die maximal zulässige Kurvengeschwindigkeit ist bestimmt durch $v \leq \sqrt{\mu_H \cdot g \cdot r}$ (vgl. Lösung 3.8)

Bei vorgegebenem Belags- und Reifenzustand hat die Haftreibungszahl μ_H einen fixen Wert. Somit kann die Maximalgeschwindigkeit nur durch Vergrösserung des Kurvenradius erhöht werden, was durch das Schneiden der Kurve erreicht wird (siehe nebenstehende Skizze)

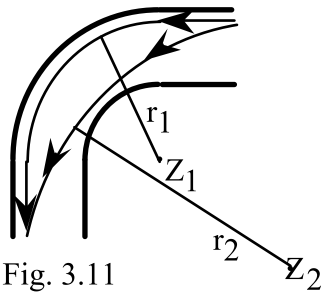


Fig. 3.11

Lösung 3.10: "Verbundene Kugeln"

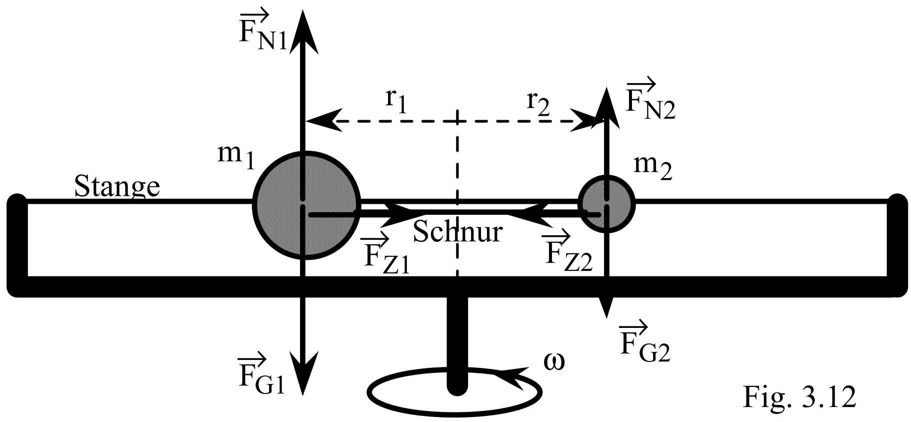


Fig. 3.12

Auf jede Kugel wirkt die Gewichtskraft, die Normalkraft von der Stange und die Schnurkraft. Da es keine vertikale Beschleunigung gibt, sind jeweils die Gewichtskraft und die Normalkraft entgegengesetzt gleich gross. Die Resultierende, welche die Zentripetalkraft liefert, ist somit gleich der jeweiligen Schnurkraft. Da die beiden Kugeln durch die Schnur miteinander verbunden sind, sind diese Schnurkräfte Wechselwirkungskräfte, welche entgegengesetzte Richtung, aber gleichen Betrag haben. Somit sind die beiden Zentripetalkräfte gleich gross: $F_{Z1} = F_{Z2}$ wobei $F_Z = m \cdot \omega^2 \cdot r$

$$\Rightarrow \qquad m_1 \cdot \omega^2 \cdot r_1 = m_2 \cdot \omega^2 \cdot r_2$$

Die Winkelgeschwindigkeit ω ist für beide Kugeln dieselbe. Die Bahngeschwindigkeiten v der beiden Kugeln sind jedoch nicht gleich, da die Kugeln Kreisbahnen mit verschiedenen Radien beschreiben. Deshalb muss für die Zentripetalkraft die Formel mit ω und nicht diejenige mit v gewählt werden.

$$\Rightarrow \qquad \frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

Die Abstände der Kugel vom gemeinsamen Kreiszentrum sind umgekehrt proportional zu den Massen der beiden Körper.

Lösung 3.11. " Mond und Erde"

Geg: $\frac{Mond}{Erde} : \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{81}$ $\qquad r = r_1 + r_2 = 384'000$ km

Lösung 3.10: $\frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1} = \frac{81}{1} \Rightarrow r_1 = 81\, r_2 \Rightarrow r = r_1 + r_2 = 82\, r_2 = 384'000$ km

$$\Rightarrow \qquad r_2 = r/82 = 4'683 \text{ km}$$

Dieser Abstand ist kleiner als der Erdradius (6'370 km). Der gemeinsame Kreismittelpunkt liegt also noch innerhalb der Erde.

Lösung 3.12. " Odies Flug durchs All"

a) **1. + 2. Schritt**

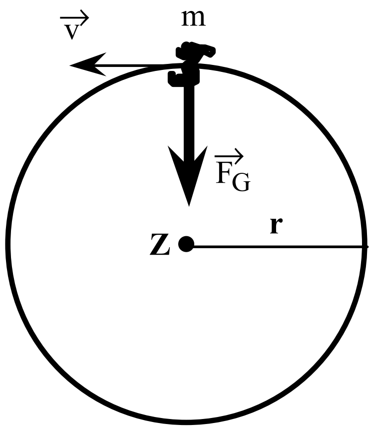


Fig. 3.13

Geg: r = 6370 km
Erdbeschleunigung g = 9.81 m/s²

Ges: Geschwindigkeit v

Die einzige Kraft, die auf Odie beim Flug um die Erde wirkt, ist die Erdanziehungskraft, die sogenannte Gewichtskraft von Odie. Diese zeigt zum Kreiszentrum Z, welches im Erdmittelpunkt liegt.

Die Gewichtskraft $\overrightarrow{F_G}$ ist also die Resultierende und somit die Zentripetalkraft.

3. + 4. Schritt

Gewichtskraft $F_G = m \cdot g$ Zentripetalkraft $F_Z = \dfrac{m \cdot v^2}{r}$

$$F_Z = F_G \quad \Rightarrow \quad \frac{m \cdot v^2}{r} = m \cdot g \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{g \cdot r} \approx 7{,}9 \cdot 10^3 m/s \approx 7{,}9 km/s$$

Diese Geschwindigkeit nennt man auch "1. kosmische Geschwindigkeit". Sie ist unabhängig von der Masse m des Körpers, der die Erde umkreist.

b) Die Zentripetalkraft ist die Gewichtskraft auf Odie. Deren Ursache ist die Erdanziehung, die sog. Gravitation zwischen Erde und Odie. Verantwortlich für diese Kraft ist somit die Erde.

c) Die Beschleunigung beträgt 9.81m/s², denn die resultierende Kraft ist gleich der Gewichtskraft $F_G = m\, g$. Auf die Masse m wirkt somit die Beschleunigung:

$$a = \frac{F_{res}}{m} = \frac{F_G}{m} = \frac{m \cdot g}{m} = g = 9{,}81 m/s^2$$

d) Ursache der Zentripetalkraft ist die von der Erde ausgeübte Gravitationskraft (siehe a). Somit übt auch Odie auf die Erde eine gleichgrosse Kraft mit entgegengesetzter Richtung aus. Diese Kraft greift am Erdmittelpunkt an und zeigt zu Odie.

e) $$v = \frac{2\pi \cdot r}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi \cdot r}{v} = \frac{2\pi \cdot r}{\sqrt{g \cdot r}} \approx \frac{2\pi \cdot 6{,}37 \cdot 10^6 m/s}{7{,}9 \cdot 10^3 m/s} \approx 5063 s \approx 1{,}41 h$$

(Falls Sie die Lösung e) nicht selbständig finden konnten, dann schauen Sie sich Aufgabe 1.16 nochmals an.)

Lösung 3.13. " Odies Looping auf der Schaukel"

Geg: m = 8 kg, r = 3 m, Erdbeschleunigung g = 9.81 m/s²

a) Im Grenzfall ist im höchsten Punkt die Seilkraft gleich null. Es wirkt dann nur die Gewichtskraft auf Odie. Die Zentripetalkraft, welche die Resultierende aller angreifenden Kräfte ist, ist in diesem Fall die Gewichtskraft.

$$F_{Zo} = F_G \quad \Rightarrow \frac{m \cdot v_o^2}{r} = m \cdot g \qquad \Rightarrow \qquad v_o = \sqrt{g \cdot r} = 5{,}42 m/s \approx 20 km/h$$

b) Energiesatz: Die Summe von potentieller und kinetischer Energie ist konstant.

$E_{potu} + E_{kinu} = E_{poto} + E_{kino}$ Mit E= 0 im tiefsten Punkt der Kreisbahn ergibt dies:

$$0 + \frac{m \cdot v_u^2}{2} = m \cdot g \cdot (2r) + \frac{m \cdot v_o^2}{2}$$

Im Grenzfall ergibt dies mit $v_o = \sqrt{g \cdot r}$: $v_u^2 = 4gr + v_o^2 = 4rg + rg = 5rg$

Die Geschwindigkeit im tiefsten Punkt ist somit mindestens

$v_u = \sqrt{5rg} = 12{,}1 m/s \approx 44 km/h$

c) Die Seilkraft im tiefsten Punkt ist: $F_{Su} = F_{Zu} + F_G$ mit $F_G = m \cdot g$ und $F_{Zu} = \frac{m \cdot v_u^2}{r}$

Im Grenzfall (Seil im höchsten Punkt gerade noch gestreckt) ist $v_u^2 = 5rg$

$$\Rightarrow \quad F_{Su} = m \cdot g + \frac{m \cdot v_u^2}{r} = m \cdot g + \frac{m \cdot (5rg)}{r} = 6mg = 471N$$

Das Seil muss somit bei einem Looping im tiefsten Punkt mindestens die sechsfache Gewichtskraft tragen.

Lösung 3.14. " Skifahrer"

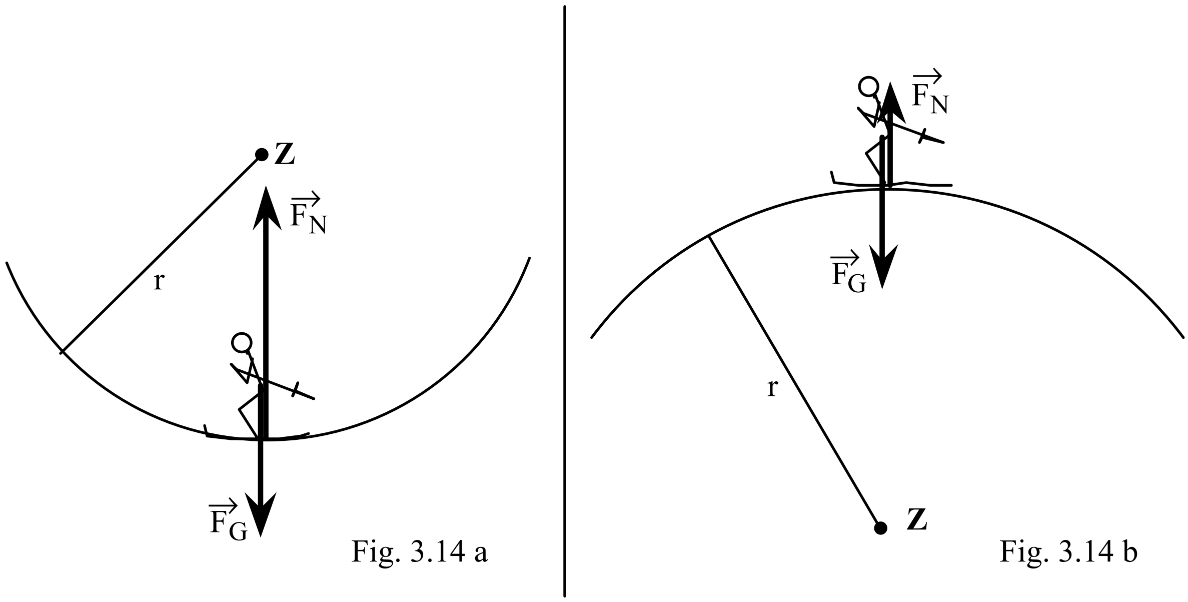


Fig. 3.14 a Fig. 3.14 b

a) Auf den Skifahrer wirken die Gewichtskraft $\overrightarrow{F_G}$ (vertikal nach unten) und $\overrightarrow{F_N}$ die Normalkraft (rechtwinklig zur Unterlage, d.h. im tiefsten Punkt vertikal nach oben). Da das Zentrum des Kreisbogens vertikal über dem tiefsten Punkt liegt, muss dort die Zentripetalkraft vertikal nach oben wirken. Sie entsteht als Resultierende, wenn die Normalkraft grösser ist als die gegebene Gewichtskraft. Je stärker die Mulde gekrümmt ist, desto kleiner ist der Kreisradius r. Bei gleicher Geschwindigkeit ist dann eine grössere Zentripetalkraft nötig ($F_Z = \frac{m \cdot v^2}{r}$), d.h. der Boden muss eine grössere Normalkraft auf den Skifahrer ausüben, da ja die Gewichtskraft unverändert bleibt. Diese grössere Normalkraft spürt der Skifahrer in den Beinen; er wird unter Umständen "zusammengestaucht".

b) Im höchsten Punkt der Kuppe muss die Zentripetalkraft vertikal nach unten wirken. Sie entsteht als Resultierende, wenn die Normalkraft kleiner ist als die gegebene Gewichtskraft. Je grösser die Geschwindigkeit ist, desto grösser muss die Zentripetalkraft sein ($F_Z = \frac{m \cdot v^2}{r}$), d.h. desto kleiner muss die Normalkraft sein, da ja die Gewichtskraft stets gleich gross ist. So ergibt sich schliesslich der Grenzfall, wo die Normalkraft gerade null ist und die ganze Gewichtskraft die Zentripetalkraft liefert. Die Geschwindigkeit beträgt dann:

$$v_{Grenz} = \sqrt{g \cdot r} \qquad \text{(aus } F_Z = F_G \Rightarrow \frac{m \cdot v_{Grenz}^2}{r} = m \cdot g\text{)}$$

Wird eine Kuppe mit grösser Geschwindigkeit befahren, reicht die Gewichtskraft nicht mehr aus, um den Skifahrer auf der vom Kuppenradius vorgegeben Kreisbahn zu halten. Es ergäbe sich eine Kreisbahn mit grösserem Radius. Der Skifahrer wird vom Boden abgehoben und beschreibt dann die Flugbahn eines schiefen Wurfes.

Kreisbewegung durch Schrägstellung

Übersicht

Wie wir im letzten Kapitel gesehen haben, ist oft nicht offensichtlich, woher die Zentripetalkraft kommt. Vielfach wirkt nicht nur eine einzelne Kraft als Zentripetalkraft, sondern die Resultierende von mehreren Kräften verursacht die Kreisbewegung. In diesem Kapitel finden Sie eine besondere Auswahl solcher Kreisbewegungen, wie Sie sie im täglichen Leben häufig vorfinden.

Bei den meisten Beispielen wirken nur zwei verschiedene Kräfte: Die eine ist die Gewichtskraft, und die andere zeigt immer in eine schräge Richtung. Diese schräge Kraft kommt bei jedem Beispiel anders zustande. Wichtig ist dabei, dass die Resultierende aller Kräfte die Zentripetalkraft ist.
Weil immer eine schräge Kraft mitwirkt, heisst der Titel dieses Kapitels "Kreisbewegung durch Schrägstellung".

Lernziele für Kapitel 4

- Sie finden selbst eigene Beispiele für die "Kreisbewegungen durch Schrägstellung".
- Sie erklären daran ,wie die Zentripetalkraft zustande kommt.
- Sie können die beteiligten Grössen berechnen. Sie können bei verschiedenen Beispielen von kreisenden Körpern erklären, wie die Zentripetalkraft zustande kommt.

4.1 Die Kräfte

Mein erstes Beispiel ist das Kettenkarussell. Sie kennen das sicher vom Rummelplatz.

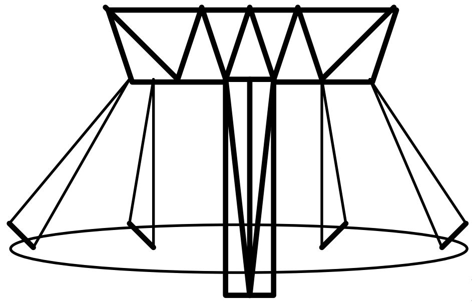


Fig. 4.1

Die Sessel sausen auf einem Kreis ringsum. Unsere Aufgabe ist herauszufinden, wie die Zentripetalkraft erzeugt wird.

Wenn Sie auf dem Sessel sitzen, bilden Sie zusammen mit diesem ein System. Darauf wirkt erstens die Schwerkraft und zweitens üben die Ketten eine Kraft aus. Damit Sie nicht hinunterfallen, muss die Gewichtskraft von einer anderen Kraft aufgehoben werden. Es ist offensichtlich, dass dies die Ketten machen. Die Kettenkraft kann aber nur entlang der Kette wirken. Sie wirkt schräg. Ein Teil der Kettenkraft, die vertikale Komponente, hebt die Gewichtskraft auf. Sie muss gleich gross wie die Gewichtskraft sein, sonst würden Sie nach oben oder unten beschleunigt. Das ist aber nicht der Fall, Sie bleiben ja auf gleicher Höhe. Die horizontale Komponente der Kettenkraft ist dann die Zentripetalkraft.

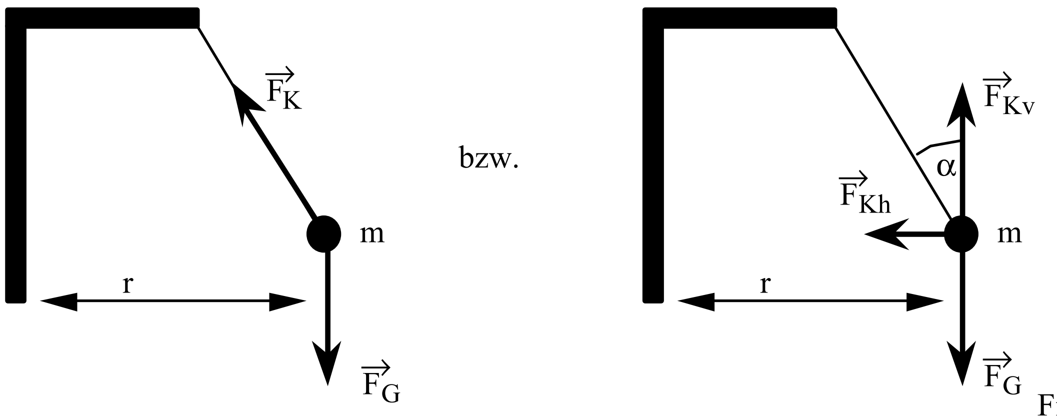


Fig. 4.2

Anders formuliert:

Passagier und Sessel beschreiben einen horizontalen Kreis mit konstanter Geschwindigkeit. Es greifen an ihm folgende Kräfte an:

- die Gewichtskraft vertikal nach unten,
- die Kettenkraft entlang der Ketten.

Diese beiden Kräfte ergeben eine Resultierende, welche horizontal zum Kreiszentrum zeigt und die erforderliche Zentripetalkraft liefert.

Aufgabe 4.1: "Karussell"

Machen Sie eine Skizze, wie Sie auf dem Kettenkarussell sitzen, ähnlich wie oben. Zeichnen Sie Ihre Gewichtskraft massstäblich ein und wählen Sie einen bestimmten Neigungswinkel α der Ketten. Konstruieren Sie die Kettenkraft und die Zentripetalkraft. Wie kann man sie aus Ihrer Gewichtskraft und α berechnen? Die Lösung finden Sie am Schluss des Kapitels.

4.2 Geschwindigkeit und Schräglage

4.2.1 Das Kettenkarussell

Aus der Kettenkraft und der Neigung haben wir die Zentripetalkraft berechnet.
$F_Z = F_{res} = F_{Kh} = F_G \cdot \tan\alpha$

Wenn wir auch den Abstand r von der Drehachse kennen, können wir die Winkelgeschwindigkeit berechnen, denn für die Zentripetalkraft gilt $F_Z = m \cdot \omega^2 \cdot r$ (4.1)

Daraus folgt $m \cdot \omega^2 \cdot r = F_G \cdot \tan\alpha$ und

$$\omega = \sqrt{\frac{F_G \cdot \tan\alpha}{m \cdot r}} = \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot \tan\alpha}{m \cdot r}} = \sqrt{\frac{g \cdot \tan\alpha}{r}} \qquad (4.2)$$

Es ist bemerkenswert, dass beim Umformen die Masse herausgekürzt wird. Wir brauchen also nur den Kreisradius und den Winkel der Neigung. Das bedeutet, dass das Gewicht für die Neigung keine Rolle spielt. Ein leichtes Kind und sein schwerer Onkel haben auf dem Kettenkarussell genau dieselbe Schräglage.

Natürlich kann man die ganzen Berechnungen auch umkehren. Wenn der Radius und die Geschwindigkeit gegeben sind, kann man daraus die Schräglage berechnen.

4.2.2 Die Bobfahrt

Ein Bobfahrer fährt mit 72 km/h durch die Horse-Shoe-Kurve. Diese Kurve hat ungefähr die Form eines Halbkreises mit 10 m Radius. Während der Bob durch die Kurve donnert, ist er also auf einer Kreisbahn, und es gelten die Regeln der Kreisbewegung.

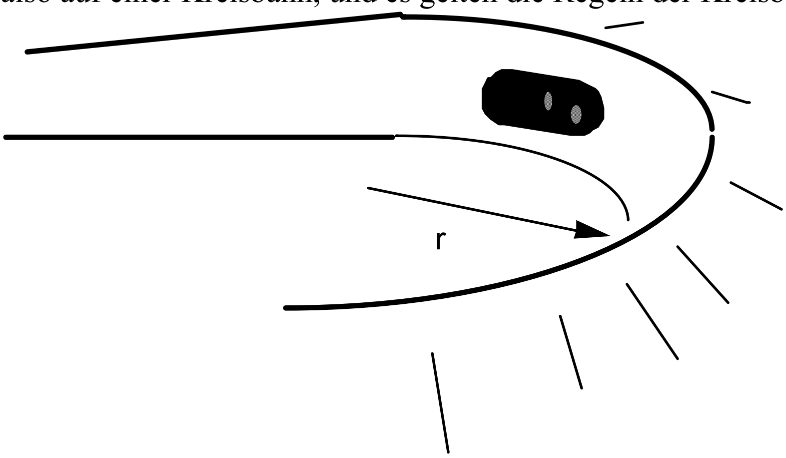


Fig. 4.3

Die Auflage- oder Normalkraft steht immer rechtwinklig zur Unterlage, ist also eine schräg wirkende Kraft. Zusammen mit der Gewichtskraft ergibt sie eine Resultierende, welche horizontal ist und zum Zentrum des Kreisbogenstückes dieser Kurve zeigt. Diese Resultierende ist somit die Zentripetalkraft.

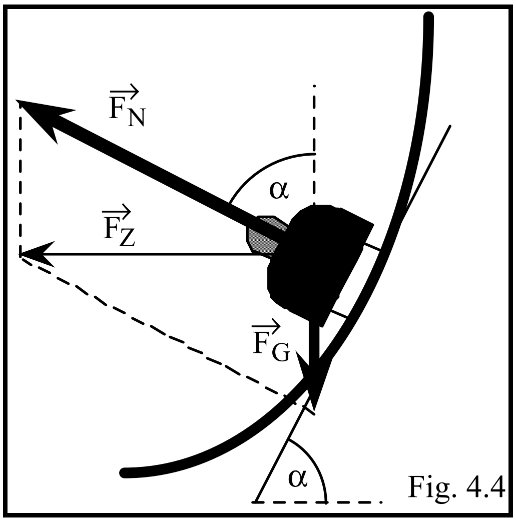


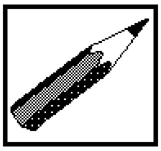
Fig. 4.4

Geg: v = 72 km/h = 20 m/s
r= 10 m
Ges: Neigungswinkel α

$$F_Z = F_G \cdot \tan\alpha \quad \text{und} \quad F_Z = \frac{m \cdot v^2}{r} \quad \text{also}$$

$$\tan\alpha = \frac{F_Z}{F_G} = \frac{\left(\frac{m \cdot v^2}{r}\right)}{m \cdot g} = \frac{v^2}{r \cdot g} \qquad (4.3)$$

Mit den gegebenen Grössen ist
$\tan\alpha = 4 \Rightarrow \quad \alpha = 76°$



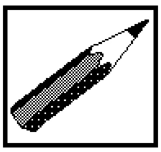
Aufgabe 4.2. "Bob"

Erstellen Sie eine Wertetabelle für die Kurvenneigung des Bobs bei verschiedenen Geschwindigkeiten und dem gegebenen Kurvenradius von 10 m.

Stellen Sie diese Tabelle grafisch dar:

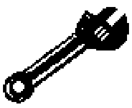
x-Achse: Geschwindigkeit des Bobs
y-Achse: Neigungswinkel des Bobs

Was vermuten Sie für sehr hohe Geschwindigkeiten?



Aufgabe 4.3: "Wasserrutschbahn"

Toni behauptet, in der Wasserrutschbahn eine Schräglage von 80° zu haben. Ist das möglich? Sie schätzen die Geschwindigkeit und den Radius der Kurve. Dann rechnen Sie ein wenig. Blufft Toni oder kann das sein?



Experiment 4.1.

Haben Sie schon einmal einem Appenzeller beim "Fünfliber trölen" zugesehen? In einer Teigschüssel mit hohem Rand lassen sie einen Fünfliber ringsum rollen, wie ein Rad in einer Steilwandkurve. Das Geräusch, das dabei entsteht, wird zur Musik gebraucht.

Übrigens, das "Trölen" ist gar nicht so einfach. Versuchen Sie es doch einmal selber und schauen Sie, ob Ihre Berechnungen ungefähr stimmen können. Die Schüssel und der Fünfliber sollten bereitstehen. Legen Sie die Schüssel auf die eine Hand. Mit der anderen starten Sie den Fünfliber. Durch gefühlvolles Kreisen mit der Schüssel können Sie dem Fünffränkler Schwung geben.

Wenn Sie es schaffen, den Fünfliber zum Kreisen zu bringen, soll eine Kollegin mit der Stoppuhr die Umlaufzeit messen. Am besten misst sie die Zeit für zehn Umläufe und teilt dann durch zehn. Das Resultat wird so genauer. Messen Sie noch den Durchmesser der Schüssel und berechnen Sie daraus die Schräglage.

Stimmt Ihr Resultat ungefähr mit dem Experiment überein?

4.2.3 Das Velo in der Kurve

Beim Kurvenfahren mit dem Velo stellen wir uns auch schräg, um die Kurve zu schaffen. Dabei spielt die Reibung zwischen Pneu und Boden eine Rolle.

Die Kraft, die der Boden auf das Velo ausübt, besteht aus zwei Teilen. Das Gesamte nennen wir Bodenkraft. Der erste Teil ist die Normalkraft. Sie wirkt bei horizontaler Strasse dem Gewicht entgegen. Der zweite Teil ist die Reibung. Sie wirkt horizontal. Die Reibung ist genau so gross, dass die Bodenkraft, also Reibung und Normalkraft zusammen, in Richtung des gemeinsamen Schwerpunktes von Velo und Fahrer zeigt. Dies ist wichtig, damit das Velo nicht umfällt. Die Bodenkraft ist also genau gleich schräg wie das Velo.

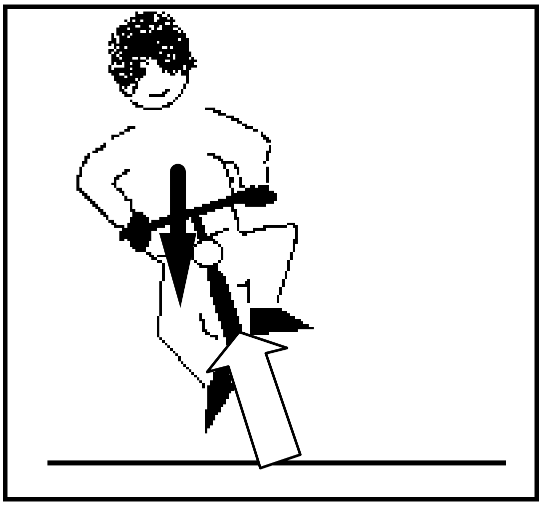
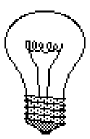


Fig. 4.5



Merke:

Beim Velo muss die Bodenkraft vom Auflagepunkt Richtung Schwerpunkt zeigen, sonst fällt das Velo um.

Bildet man die Resultierende von Bodenkraft und Gewichtskraft, so zeigt diese horizontal zum Zentrum der Kreisbahn, welche der Schwerpunkt des Systems Fahrer + Rad beschreibt. Sie ist die erforderliche Zentripetalkraft.

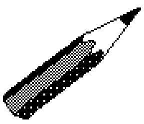
Auch hier gilt wiederum $F_Z = F_G \cdot \tan\alpha$ und $F_Z = \frac{m \cdot v^2}{r}$ und somit

$$\tan\alpha = \frac{F_Z}{F_G} = \frac{\left(\frac{m \cdot v^2}{r}\right)}{m \cdot g} = \frac{v^2}{r \cdot g} \qquad \text{(siehe 4.3)}$$

Peter möchte meine Behauptung testen. Er zeichnet einen Kreidekreis mit 5 m Radius auf den Schulhausplatz. Auf diesem Kreis fährt er nun mit 15 km/h.
Er rechnet (mit v = 15 km/h = 4.17 m/s):

$$\tan\alpha = \frac{v^2}{r \cdot g} = \frac{(4{,}17m/s)^2}{5m \cdot 10m/s^2} = 0{,}347 \Rightarrow \qquad \alpha = 19°$$

Die Bodenkraft ist also um 19° geneigt. Dies ist zugleich die Schräglage des Velos, weil die Bodenkraft vom Boden Richtung Schwerpunkt zeigen muss.



Aufgabe 4.4: "Mofa"
Überlegen Sie sich , ob dasselbe auch für ein Mofa gelten muss. Hat Paul mit seinem Töffli auf dem Kreis mit der gleichen Geschwindigkeit dieselbe Kurvenlage? Welche Rolle spielt die grössere Masse des Töfflis? Begründen Sie schriftlich.

Sie wissen (vielleicht aus eigener Erfahrung), dass man sich mit dem Velo nicht beliebig stark gegen innen neigen kann, sonst stürzt man. Insbesondere in vereisten Kurven ist dieses Risiko gross. Wo liegt die Grenze?
Auf der horizontalen Strasse ist die Normalkraft entgegengesetzt gleich der Gewichtskraft, denn es gibt ja keine vertikale Beschleunigung. Da sich also diese beiden Kräfte kompensieren, bleibt für die Resultierende nur noch der zweite Anteil der Bodenkraft, die Reibung. Die Zentripetalkraft wird somit durch die quer zur Fahrrichtung gegen das Kurveninnere wirkende Haftreibungskraft erzeugt. (Erinnern Sie sich noch an das Auto in der Kurve im Kapitel 3.3?). Diese Haftreibungskraft kann aber einen bestimmten Maximalwert nicht überschreiten:

$$F_R \le \mu_H \cdot F_N = \mu_H \cdot F_G$$

Also gilt auch $F_R \le \mu_H \cdot F_G$

Mit $F_Z = F_G \cdot \tan\alpha$ ergibt dies $\tan\alpha \le \mu_H$

Mit dem in der DMK/DPK-Formelsammlung tabellierten Wert μ_H = 1.0 für Pneu auf trockener Strasse bekommt man einen maximalen Neigungswinkel von 45°.

4.3 Recherche

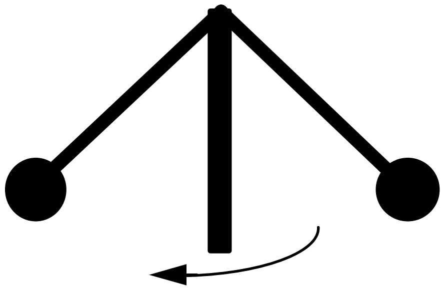


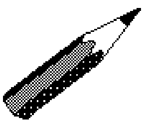
Fig. 4.6

An einer Achse sind zwei Stabpendel befestigt. Sie sind so befestigt, dass sie nach innen und aussen frei pendeln können, aber mit der Achse drehen müssen. Je schneller die Achse dreht, umso mehr stellen sich die Pendel schräg. Dieses Abspreizen der Pendel kann man technisch nutzen, um eine Maschine auf eine bestimmte Drehgeschwindigkeit zu regeln. Diese Erfindung heisst (irreführend) "Fliehkraftregler" oder besser "Drehzahlregler".

Schlagen Sie in einem Lexikon diesen Begriff nach. Versuchen Sie zu verstehen, wie der Regler funktioniert und wozu er zu gebrauchen ist. Falls der Begriff zu knapp erklärt ist, oder nicht aufgeführt ist, schauen Sie in einem anderen Nachschlagewerk nach, vielleicht ist dort eine bessere Erklärung. Eventuell hat Ihr Lehrer ein Modell aufgestellt. Schauen Sie es sich einmal an.

Ersatz

Falls kein Lexikon zur Verfügung steht oder sonst etwas nicht klappt, können Sie den Text auf der nächsten Seite studieren. Falls Sie aber schon alles im Lexikon verstanden haben, können Sie diesen überspringen und bei den Lernkontrollen weiterfahren.



Aufgabe 4.5: "Mühle"

Mit diesem Regler kann man auch eine Mühle regeln. Nachdem Ihnen klar ist, wie der Regler funktioniert, können Sie dies sicher erklären. Erstellen Sie eine kleine Konstruktionsskizze vom Wasserrad, dem Wasser und dem Regler. Erklären Sie schriftlich die Funktionsweise.

Eine mögliche Lösung finden Sie bei den Lösungen am Schluss des Kapitels.

Ein Drehzahlregler ist zum Beispiel an einer Dampflokomotive angeschlossen. Je schneller die Räder drehen, desto schneller dreht sich die Achse des Reglers. Durch die Drehung stellen sich die Pendel schief. Je schneller die Drehung desto schräger die Pendel.

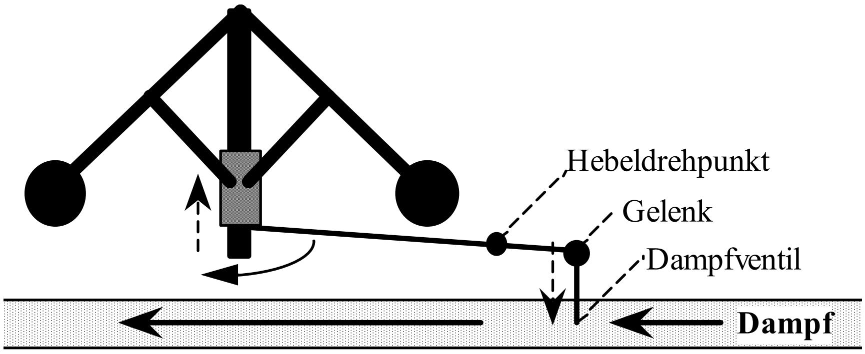


Fig. 4.7

Die eigentliche Erfindung besteht darin: Man setzt eine Hülse auf die Achse, und verbindet sie, wie oben skizziert, mit den Pendelarmen. Wenn die Achse schnell dreht, stehen die Pendel weit ab, und die Hülse rutscht auf der Achse nach oben. Umgekehrt, wenn die Achse langsam dreht, rutscht sie nach unten. Verbindet man die Hülse über einen Hebel mit dem Dampfventil der Lokomotive, so entsteht eine automatische Geschwindigkeitsregelung. Geht es aufwärts, und die Lokomotive hat stark zu schleppen, so wird der Zug langsamer. Die Räder drehen langsamer und die Pendel senken sich. Dadurch wird die Hülse nach unten geschoben, was über den Hebel das Dampfventil weiter öffnet. Dies gibt der Maschine mehr Kraft und sie kann wieder Geschwindigkeit aufnehmen. Geht es dann wieder geradeaus, wird der Zug zu schnell. Die Pendelarme steigen und ziehen die Hülse nach oben. Dies schliesst das Ventil, und der Zug hat wieder normale Geschwindigkeit.

4.4 Lernkontrollen

Hier sind ein paar Aufgaben zur Kreisbewegung durch Schrägstellung. Mit diesen Problemen können Sie testen, ob Sie das Kapitel verstanden haben. Wenn Sie von den ersten fünf Aufgaben vier richtig gelöst haben, beherrschen Sie das Kapitel und können Sie sich beim Tutor für den Kapiteltest melden. Haben Sie weniger als vier Aufgaben richtig, sollten Sie wohl den entsprechenden Stoff noch einmal anschauen.

Aufgabe 4.6

Im Restaurant läuft der Kellner mit dem Tablett auf einer Hand herum. In jeder Kurve hält er das Tablett schief. Welche Kräfte wirken auf das Tablett. Wo und in welche Richtung? Wie stehen sie zueinander in Beziehung?

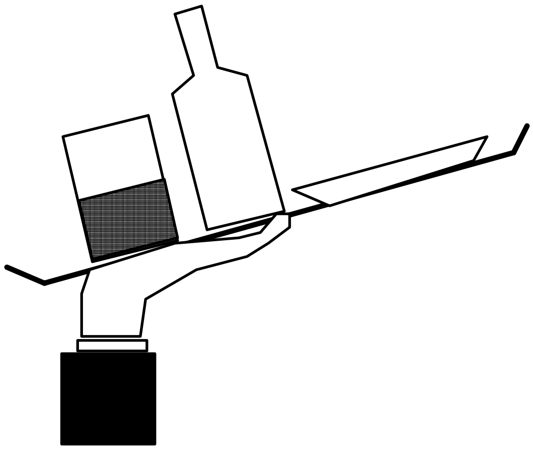


Fig 4.8

Aufgabe 4.7

Eine Roulettekugel wird in die Schüssel geworfen. In 20 cm Abstand vom Zentrum läuft sie mit der Geschwindigkeit von 60 cm/s auf der schrägen Wand ringsum. Welche Neigung hat die Wand?

Aufgabe 4.8

Ein Pendolino-Zug (der Wagenkasten kann sich zum Fahrgestell neigen) fährt mit 140 km/h um eine Kurve mit Radius 700 m. Wie stark neigt sich der Wagen?

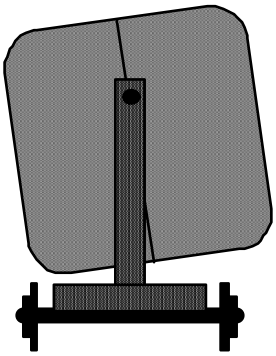


Fig. 4.9

Diese Frage ist nicht ganz realistisch gestellt. Wie Sie sicher schon beobachtet haben, sind die Geleise der SBB in den Kurven geneigt und nicht eben. Durch diese Neigung sind die Kurven genau für eine bestimmte Geschwindigkeit gebaut. Fährt der Zug schneller, so wird die Zentripetalkraft grösser, und die Bodenkraft ist nicht mehr gleich schräg wie der Zug. Weil der Zug auf mehreren Rädern steht, fällt er zwar nicht um, aber es ist unangenehm für die Passagiere. Der Pendolino aber gleicht die Differenz zwischen der nötigen Neigung und derjenigen des Gleises aus. Er kann also schneller durch die Kurven fahren ohne dass es ungemütlich wird.

Aufgabe 4.9

Ein Rollbrettfahrer fährt auf dem Trottoir. Blitzschnell weicht er einem Fussgänger aus. Dies war sein Physiklehrer, der sofort rechnet: Die Kurve hatte einen Radius von 1.5 m. Die Schräglage war 20° oder mehr. Wie schnell war das Rollbrett mindestens?

Aufgabe 4.10

Kann ein Bobfahrer so schnell durch die Kurve fahren, dass die Schräglage grösser als 90° ist? Wenn ja, wie? Wenn nein, wieso nicht?

Aufgabe 4.11 fakultatives Additum für Freaks

Dies ist mathematisch eine recht anspruchsvolle Aufgabe mit Klippen. Falls Sie Freude an mathematisch physikalischen Tüfteleien haben, erwartet Sie ein überraschendes Resultat. Falls Sie aber keine Lust haben, lassen Sie es einfach bleiben.

Berechnen Sie die Höhe der Hülse an der Achse des Drehzahlreglers für verschiedene Drehgeschwindigkeiten. Machen Sie eine grafische Darstellung.

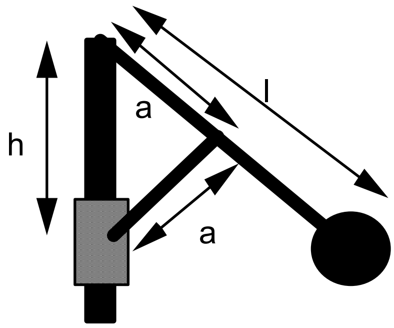


Fig. 4.10

Gegeben: l = 30 cm ; a = 10 cm

Tips: Achtung, mit dem Spreizwinkel ändert sich der Abstand der Gewichte von der Achse, und damit auch die Zentripetalkraft. Achten Sie darauf, nicht durch Null zu teilen. Auch die Interpretation des Resultates ist nicht ganz ohne. Viel Erfolg!

Lösungen und Hinweise zu den Aufgaben

Lösung 4.1: "Karussell"

Die Komponentenzerlegung der Kettenkraft ergibt
$F_{Kv} = F_K \cdot \cos\alpha$ und $F_{Kh} = F_K \cdot \sin\alpha$

Die vertikalen Kräfte sind entgegengesetzt gleich gross: $F_{Kv} = F_G$

Daraus folgt für die **Kettenkraft**: $F_K = \dfrac{F_{Kv}}{\cos\alpha} = \dfrac{F_G}{\cos\alpha} = \dfrac{m \cdot g}{\cos\alpha}$

Die **Zentripetalkraft** ist gleich der Horizontalkomponente der Kettenkraft:

$$F_Z = F_{Kh} = F_K \cdot \sin\alpha = \frac{m \cdot g}{\cos\alpha} \cdot \sin\alpha = m \cdot g \cdot \tan\alpha$$

Mit diesen Formeln können Sie diese Kräfte für Ihre Masse (inkl. Sessel) und den von Ihnen gewählten Neigungswinkel ausrechnen. Vergleiche das Resultat mit Ihrer Konstruktion.

[Falls etwas nicht stimmt, schauen Sie sich noch einmal genau meine Skizze vom Kettenkarussell an. So etwas sollten Sie auch bekommen. Beachten Sie dabei die anschliessende Beschreibung der Kräfte.]

Lösung 4.2: "Bob"

Aus dieser Grafik können Sie die richtigen Resultate ablesen. Die Formel steht bei der Aufgabe.

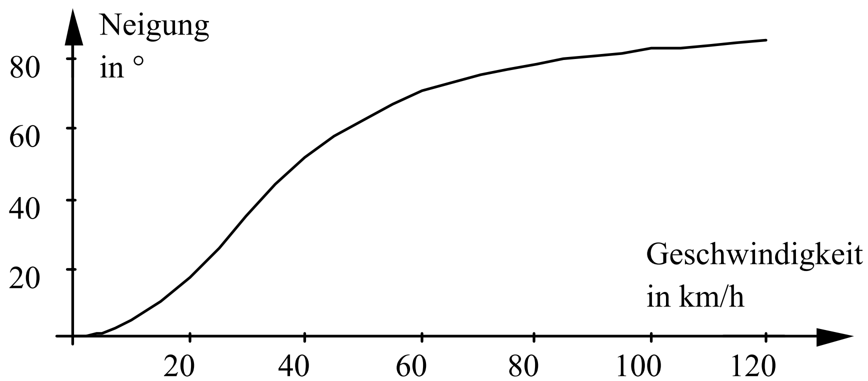


Fig. 4.11

[Die Werte für diese Kurve sind mit Formel (4.3) berechnet. Dafür muss man allerdings die Geschwindigkeit in m/s umrechnen. Um auf die Neigung α zu kommen, muss man den ArcusTangens ($\tan^{-1}$) der rechten Seite nehmen.]

Lösung 4.3: "Wasserrutschbahn"

Im Prinzip ist es dasselbe Problem, und dieselbe Formel, wie bei der Bobbahn. Nur die Daten sind ein wenig anders. Ich habe für verschiedene Kurvenradien und mögliche Geschwindigkeiten die Schräglage von Toni berechnet. Vergleichen Sie Ihr Resultat mit meinem für ähnliche Daten.

v[m/s] r [m]	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2°	11°	24°	39°	51°	61°	68°	72°	76°	79°
3	2°	8°	17°	29°	40°	51°	59°	65°	70°	74°
4	1°	6°	13°	22°	33°	43°	51°	58°	64°	69°
5	1°	5°	10°	18°	27°	36°	45°	53°	59°	64°

Meiner Meinung nach ist Toni ein grosser Aufschneider.

[Berechnet sind die Werte genau gleich wie in der Aufgabe 4.2 "Bob". Falls Sie keine richtige Lösung haben, schauen Sie sich einmal diese Aufgabe genau an. Falls Sie andere Schätzwerte für Geschwindigkeit oder Radius haben als ich, macht das nichts, lassen Sie doch Ihr Resultat von einem Kollegen kontrollieren.]

Lösung 4.4: "Mofa"

Ja, mit dem Mofa ist es dasselbe wie mit dem Velo. Auch ein Töffli braucht eine Zentripetalkraft zum Kurvenfahren. Ebenso muss die Bodenkraft den gleichen Winkel zum Boden haben wie das Töffli.

[Wenn Ihnen das nicht ganz klar ist, lesen Sie doch den Abschnitt über das Velo (oberhalb der Aufgabe) noch einmal, ersetzen Sie dabei einfach "Velo" durch "Mofa" und überprüfen Sie, ob der Inhalt noch immer stimmt.]

Lösung 4.5: "Mühle"

Der Regler dreht mit dem Mühlrad. Je schneller dieses dreht, desto höher werden die Pendelarme angehoben. Über eine geeignete Vorrichtung können diese die Wassermenge steuern. Je höher die Pendelarme steigen, desto mehr wird der Wasserzufluss eingeschränkt. Dadurch kommt weniger Wasser auf das Mühlrad, dieses dreht langsamer, die Pendelarme sinken und es kommt wieder mehr Wasser, was wieder eine grössere Drehzahl des Mühlrades bewirkt, die Pendelarme steigen, ...

Nach einiger Zeit pendelt sich dieser Mechanismus auf einer mittleren Position ein und das Mühlrad arbeitet mit gleichbleibender Drehzahl.

Lösung 4.6

Die Gewichtskraft des Tabletts drückt immer vertikal nach unten. Die Hand des Kellners drückt im rechten Winkel zum Tablett. Damit das Tablett nicht herabfällt, muss die vertikale Komponente davon gleich gross sein wie die Gewichtskraft. Die andere Komponente, die Waagerechte, ist die Zentripetalkraft.

[Dies ist fast dieselbe Aufgabe wie 4.1 "Karussell". Falls es nicht geklappt hat, schauen Sie sich diese Aufgabe noch einmal an.]

Lösung 4.7

Zentripetalkraft : $F_Z = \frac{m \cdot v^2}{r}$ Gewichtskraft: $F_G = m \cdot g$

$$\tan\alpha = \frac{F_Z}{F_G} = \frac{\left(\frac{m \cdot v^2}{r}\right)}{m \cdot g} = \frac{v^2}{r \cdot g} = \frac{(0{,}6m/s)^2}{0{,}2m \cdot 9{,}8m/s^2} = 0{,}184 \qquad \Rightarrow \alpha \approx 10°$$

[Dies entspricht eigentlich der Aufgabe mit der Wasserrutschbahn oder dem Bob. Nur sind hier die Einheiten etwas anders; vergessen Sie nicht umzurechnen.]

Lösung 4.8

Gegeben: v =140 km/h = 38.9 m/s; r = 700 m

Zentripetalkraft : $F_Z = \frac{m \cdot v^2}{r}$ Gewichtskraft: $F_G = m \cdot g$

$$\tan\alpha = \frac{F_Z}{F_G} = \frac{\left(\frac{m \cdot v^2}{r}\right)}{m \cdot g} = \frac{v^2}{r \cdot g} = \frac{(38{,}9m/s)^2}{700m \cdot 9{,}8m/s^2} = 0{,}22 \qquad \Rightarrow \alpha \approx 12^o$$

Lösung 4.9

Gegeben: r = 1.5 m; α = 20°

Die Konstruktion der Kräfte ergibt für die Resultierende $F_{res} = F_G \cdot \tan\alpha$.

Diese ist die Zentripetalkraft $F_Z = \frac{m \cdot v^2}{r}$

$$v = \sqrt{r \cdot g \cdot \tan\alpha} = \sqrt{1{,}5m \cdot 9{,}8m/s^2 \cdot \tan(20°)} = 2{,}3m/s = 8{,}3km/h$$

[Wir rechnen hier nicht aus der Geschwindigkeit die Neigung aus, sondern genau umgekehrt.]

Lösung 4.10

Nein, das ist nicht möglich. Die Normalkraft muss eine vertikale Komponente haben, welche die Gewichtskraft kompensiert. Ist der Winkel 90° oder grösser, so ist diese Komponente entweder null oder sie zeigt nach unten.

[Eine Schräglage grösser als 90° heisst, dass der Bob kopfüber hängt. Machen Sie sich eine Skizze ähnlich wie Fig. 4.4 mit α grösser als 90° und zeichnen Sie dann die Kräfte ein. Wie Sie sehen, zeigt die Bodenkraft nach unten. So kann sie unmöglich die Schwerkraft kompensieren, sie verstärkt sie sogar.]

Lösung 4.11

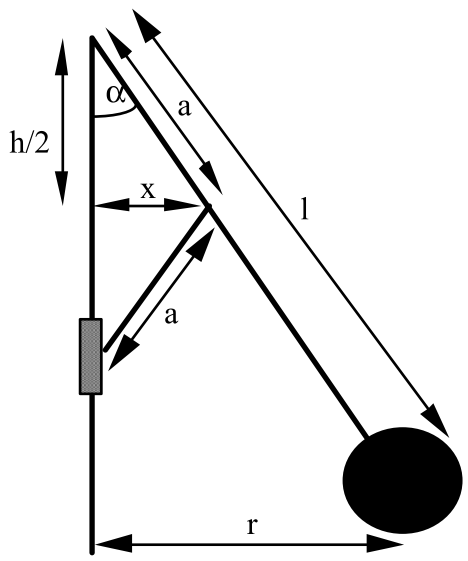


Fig. 4.12

$\frac{l}{r} = \frac{a}{x} \Rightarrow r = \frac{l \cdot x}{a}$

Mit $F_Z = m \cdot \omega^2 \cdot r$ ist einerseits

$$\tan\alpha = \frac{F_Z}{F_G} = \frac{m \cdot \omega^2 \cdot r}{m \cdot g} = \frac{\omega^2 \cdot \frac{l \cdot x}{a}}{g} = \frac{\omega^2 \cdot l \cdot x}{g \cdot a}$$

Andererseits ist $\tan\alpha = \frac{x}{h/2}$

Somit ist $\frac{\omega^2 \cdot l \cdot x}{g \cdot a} = \frac{x}{h/2}$ bzw. $x \cdot \left(\frac{\omega^2 \cdot l}{g \cdot a} - \frac{2}{h}\right) = 0$

Lösungen dieser Gleichung sind: x = 0 und

$$\left(\frac{\omega^2 \cdot l}{g \cdot a} - \frac{2}{h}\right) = 0 \Rightarrow h = \frac{2 \cdot g \cdot a}{l \cdot \omega^2}$$

Da aber h unmöglich grösser als 2 a werden kann, gilt:

für $\omega < \sqrt{\frac{g}{l}} \Rightarrow x = 0$ und h = 2a

für $\omega > \sqrt{\frac{g}{l}} \Rightarrow h = \frac{2 \cdot g \cdot a}{l \cdot \omega^2}$

Bei langsamer Drehung hebt sich das Pendel also nicht. Erst ab einer bestimmten Grenzdrehzahl beginnt sich das Pendel zu heben und h wird kürzer.
Mit den angegebenen Werten erhält man die folgende grafische Darstellung der Höhe h in Abhängigkeit der Winkelgeschwindigkeit ω:

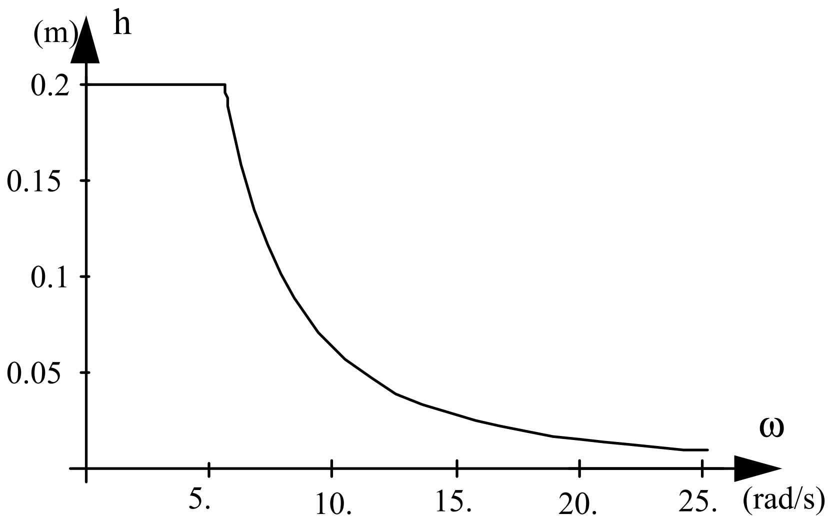


Fig. 4.13

[Machen Sie sich nichts daraus, falls es nicht geklappt hat. Haben Sie vielleicht durch eine Variable geteilt? Damit haben Sie die Nulllösung ausgeschlossen. Es sind aber auch andere Fehler möglich, und andere Wege können zum richtigen Resultat führen. Um sie zu finden, brauchen Sie vielleicht etwas mehr Glück.]

Trägheitskräfte

Dieses Kapitel geht über den Bereich der Kreisbewegung hinaus. Sie müssen es nicht unbedingt durcharbeiten. Es lohnt sich aber! Denn es gibt Ihnen einen Einblick in eine wichtige Arbeitsweise der Physik:

Die Beschreibung eines Bewegungsablaufes ist abhängig vom Koordinatensystem, das man dazu wählt. Dabei kommt es darauf an, ob es, relativ zum betrachteten Objekt, in Ruhe, gleichförmig bewegt oder beschleunigt ist. Wir werden einige Gesetzmässigkeiten finden, die wir zur Vereinfachung der Beschreibung ausnutzen können.

Übersicht

Wir haben in den vorhergehenden Kapiteln die Zentripetalkraft als Bedingung für die Kreisbewegung erkannt. Dabei haben wir das rotierende System, z.B. ein Karussell, immer *von aussen* betrachtet.

Was ändert sich, wenn wir *auf* das Karussell gehen und mitrotieren? Gelten die gleichen Gesetze immer noch? Sie werden sehen, der Standpunkt des Beobachters spielt eine Rolle.

Wenn wir auf einer rotierenden Kreisscheibe stehen, wirkt die Zentripetalkraft immer noch. Wissen wir jedoch nichts von unserer Drehbewegung (halten wir z.B. die Augen zu), so ist das komisch. Die Zentripetalkraft "hat keinen Sinn", denn es dreht sich ja scheinbar nichts. Dieser Widerspruch wird uns im ersten Abschnitt dazu führen, eine zusätzliche Kraft anzunehmen. Diese gibt es aber nur im rotierenden System. Sie werden sehen, mit dieser neuen Kraft sind einige physikalische Probleme einfacher und eleganter lösbar.

Im zweiten Abschnitt wollen wir unsere Betrachtungen auf geradlinig beschleunigte Systeme erweitern.

Lernziele für das Additum

- Am wichtigen Beispiel der Kreisbewegung verstehen Sie, dass physikalische Beschreibungen abhängig sind vom relativen Bewegungszustand der benutzten Koordinatensysteme.

- Sie sind in der Lage, Probleme der Kreisbewegung von zwei Blickwinkeln her zu formulieren und zu lösen:
  - Beobachter steht neben der rotierenden Kreisscheibe.
  - Beobachter steht auf der rotierenden Kreisscheibe.

  Dabei benutzen Sie eine neue, irgendwie nur scheinbar auftretende Kraft.

- Sie sind in der Lage dieselbe Lösungsmethode ebenfalls auf geradlinig beschleunigte Bewegungen anzuwenden.

A.1 Mitbewegt auf der Kreisscheibe

Von den letzten Kapiteln her kennen wir die folgende Situation: Eine Kreisscheibe dreht sich mit Winkelgeschwindigkeit ω:

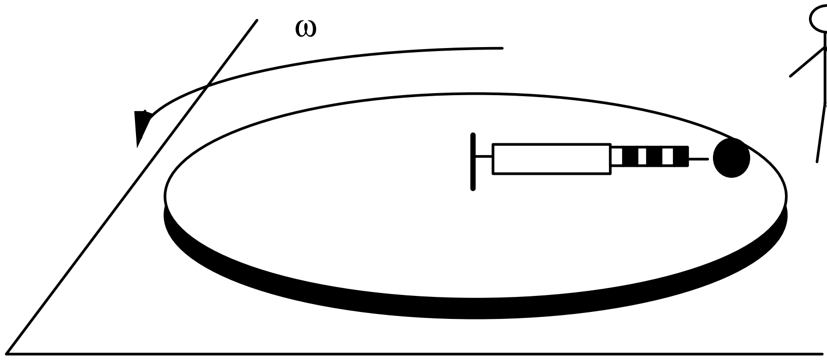


Fig A.1

Auf der Scheibe befindet sich eine Kugel, die durch eine Federwaage auf einer Kreisbahn gehalten wird. An der Federwaage können wir den Betrag der dazu benötigten Zentripetalkraft $F= m\ \omega^2 r$ direkt ablesen. Bei dieser Beschreibung stehen wir neben der Scheibe. Wir bewegen uns selbst *nicht* mit.

Was ändert sich, wenn wir auf die Kreisscheibe gehen, wie sieht der Vorgang dann aus?

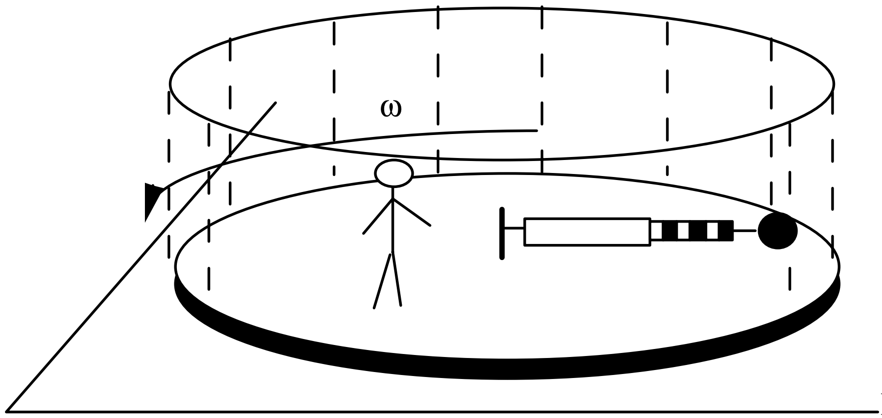


Fig. A.2

Die Kreisscheibe dreht sich immer noch mit der Winkelgeschwindigkeit ω. An ihrem Rand sei ein Vorhang, sodass wir nur sehen, was *auf* der Scheibe vorgeht. Wir wissen also erst einmal gar nicht, ob die Scheibe sich dreht oder nicht.

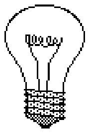
Die Kugel ist jetzt, in Bezug auf die Kreisscheibe und unseren Standort auf der Scheibe, in Ruhe. Wir können sie mit den Augen fixieren und ihr folgen, *ohne* den Kopf zu drehen. Trotzdem können wir an der Federwaage eine Kraft ablesen.

Erinnerst Sie sich an Newtons Trägheitsgesetz? Wenn ein Körper in Ruhe ist, so heben sich die auf ihn wirkenden Kräfte auf, ihre vektorielle Summe ist Null. Wir stehen vor der

Alternative, die bisherigen Gesetze der Physik zu verwerfen oder anzunehmen, dass eine zusätzliche Kraft unbekannten Ursprungs wirkt, welche die Resultierende zu Null macht.

Mit dem Trägheitsgesetz können wir mehr herausfinden über diese neue Kraft: Die Federwaage bewirkt eine Kraft gegen das Kreiszentrum, vom Betrage (m ω^2r). Die neue Kraft, die diese aufhebt, wirkt demzufolge vom Kreiszentrum weg, dem Radius entlang nach aussen. Und ihr Betrag ist gleich gross: (m ω^2r).

Diese nach aussen wirkende Kraft heisst *Zentrifugalkraft* oder *Fliehkraft.*

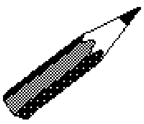


Regel:

Ein mitrotierender Beobachter benötigt zur Beschreibung von Bewegungen eine zusätzliche Kraft, die Zentrifugalkraft $\overrightarrow{F_Z'}$. Ihr Betrag ist gleich gross wie jener der Zentripetalkraft $\overrightarrow{F_Z}$. → $F_{Z'} = m \cdot \omega^2 \cdot r$

Die Zentrifugalkraft zeigt aber radial nach aussen, hat somit dieselbe Richtung wie der Radiusvektor . Wir können dies als Vektorgleichung schreiben: $\overrightarrow{F_Z'} = m \cdot \omega^2 \cdot \vec{r}$

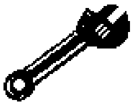
Der Beobachter neben der Scheibe "sieht" diese Kraft nicht. Denn sie ist von seinem Standpunkt aus gesehen gar nicht nötig. Die Kugel ist ja beschleunigt, und es muss also eine resultierende Kraft geben, welche die Beschleunigung verursacht. Es braucht keine andere Kraft, welche diese aufhebt.



Aufgabe A.1: "Die Zentrifugalkraft wirkt allein"

Ein Beobachter steht auf der rotierenden Scheibe. An einer Schnur hält er eine Kugel fest, die ebenfalls die Kreisbewegung mitmacht. Was geschieht unmittelbar nachdem er die Schnur loslässt?

Notieren Sie sich Ihre Antwort in Stichworten oder machen Sie eine kleine Skizze. Falls Sie Schwierigkeiten mit dem Standpunkt des Beobachters auf der Scheibe haben, so überlegen Sie sich, welche Bewegung die Kugel nach dem Loslassen für einen neben der Scheibe stehenden Beobachter macht. Schliessen Sie daraus, was man von der Scheibe aus sieht. Sie können sich die Situation anhand von Fig. A.1 veranschaulichen.



Experiment A.1

Im Schulzimmer steht ein Topf mit Katzengras. Der Topf war mehrere Tage auf einem sich ständig drehenden Teller. Gehen Sie und sehen ihn sich an. Überlegen Sie sich, warum das Katzengras wohl so wächst. Machen Sie eine erklärende Skizze. Erst wenn Sie es zu wissen glauben, lesen Sie weiter. Sie finden anschliessend die Erklärung.

Erklärung: Das Katzengras wächst der Kraft entgegen, die es spürt. Normalerweise ist das nur die Schwerkraft, und es wächst senkrecht nach oben. Hier wirkt zusätzlich die Zentrifugalkraft $\overrightarrow{F_Z'}$, denn die Pflanze befindet sich *im* rotierenden System.

Somit wächst die Pflanze entgegen der Gesamtkraft $\overrightarrow{F_{Ges}}$, schräg nach innen.

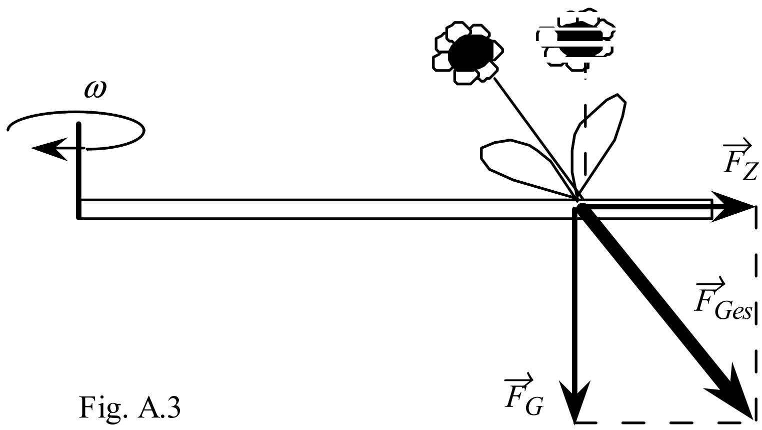
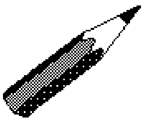


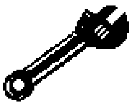
Fig. A.3



Aufgabe A.2: "Ein Mensch am Äquator ..."

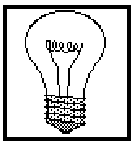
Die Erde dreht sich einmal in 24 Stunden um sich selbst. Ihr Radius beträgt rund 6'370 km. Wie gross ist die Zentrifugalkraft $\overrightarrow{F_Z'}$, die ein 70 kg schwerer Mensch am Äquator spürt? Welchem Bruchteil der Gewichtskraft entspricht das?

Können Sie die Aufgabe nicht lösen oder stimmt Ihre Lösung nicht mit der richtigen Antwort überein, so studieren Sie diesen Abschnitt A.1 noch einmal.



Experiment A.2.

Gehen Sie zur Schwungmaschine. Dort finden Sie zwei Blätter aus Metall eingespannt. Drehen Sie und beobachten Sie, wie sich die Kugel deformiert! Genauso ergeht es der Erde. Sie ist eine Kugel, die sich dreht. Auch sie wird deformiert. Sie ist abgeplattet.



Wir fassen zusammen:

Eine gleichförmige Kreisbewegung braucht eine zum Kreiszentrum (also entgegengesetzt zum Radiusvektor $\vec{r}$) gerichtete resultierende Kraft, welche die Krümmung der Bahn aufrecht erhält,

die Zentripetalkraft $\overrightarrow{F_Z} = -m \cdot \omega^2 \cdot \vec{r}$

Rotiert der Beobachter mit dem System, so scheint es, dass es *zusätzlich* zu allen Kräften, die *zusammen* die Zentripetalkraft ergeben, eine weitere Kraft gibt, die radial nach aussen wirkt,

die Zentrifugalkraft $\overrightarrow{F_Z'} = m \cdot \omega^2 \cdot \vec{r}$

A.2 Beschleunigte und unbeschleunigte Bezugssysteme: Trägheitskräfte

Wir haben gesehen, dass es wichtig ist festzustellen, ob ein System rotiert oder nicht. In diesem Abschnitt werden Sie diese Unterscheidung an einem anderen beschleunigten System nochmals sehen. Danach werden Sie erfahren, dass es in diesen Fällen auch etwas wie eine Zentrifugalkraft geben muss.

Der Beobachter auf der Kreisscheibe sieht andere Kräfte als jener, der neben der Scheibe steht. Das haben wir im letzten Abschnitt gesehen. Sehen wir uns jetzt einmal ein anderes beschleunigtes System an:

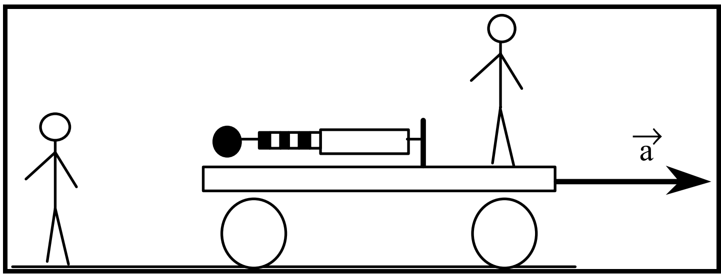


Fig. A.4

Der Wagen wird bezüglich des Bodens mit beschleunigt. Darauf ist wiederum eine Kugel der Masse m über eine Federwaage befestigt. Die Kugel ist für den Beobachter am Boden ebenfalls beschleunigt, die Federwaage überträgt die Beschleunigung des Wagens auf die Kugel. Deshalb ist sie gespannt und zeigt die beschleunigende Kraft $(m\cdot \vec{a})$ an.

Ist der Wagen ein beschleunigtes System? Das ist eine einfache Frage, wenn wir neben dem Wagen stehen. Dann sehen wir ja, wie der Wagen beschleunigt wird und immer schneller über den Boden fährt. Stellen Sie sich nun aber vor, Sie sitzen auf dem Wagen, und der Wagen habe Wände, sodass Sie nicht hinaussehen können. Ist der Wagen nun beschleunigt oder nicht?

Sie sehen die Kugel, sie ist in Ruhe. Aber die Feder, die sie hält, ist gespannt. Es wirkt also eine Kraft auf die Kugel. Schneiden Sie die Feder durch, so beginnt die Kugel zu rollen, ohne dass Sie eine Kraftwirkung wahrnehmen. Nach dem Trägheitsgesetz aber müsste die Kugel in Ruhe bleiben, wenn keine Kraft wirkt. Entweder ist das Trägheitsgesetz verletzt, oder Sie müssen (wie im rotierenden System) eine zusätzliche Kraft annehmen.

Wir wollen uns überlegen, welche Kräfte im Falle des beschleunigten Wagens wirken. Der Beobachter am Boden sieht den beschleunigten Wagen mit der Kugel, welche durch eine Federwaage gehalten wird. Die Feder ist gespannt, denn sie erteilt der Kugel die Kraft $(m\cdot \vec{a})$.

Was für Kräfte wirken für den Beobachter auf dem Wagen? Die Antwort kennen Sie eigentlich schon. Es ist wie im Falle der Fliehkraft auf der Kreisscheibe. Überlegen Sie es sich selbst, notieren Sie Ihre Antwort in Stichworten. Gehen Sie dann auf die nächste Seite, dort steht die Antwort.

Antwort:

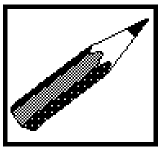
Ich bin auf dem Wagen, die Kugel ruht in Bezug auf den Wagen, aber die Federwaage zeigt eine Kraft $\vec{F}$ an. Gilt das Trägheitsgesetz, so muss noch eine zweite Kraft $\vec{F}$ wirken, der Federkraft entgegen. $\vec{F'}$ muss $\vec{F}$ aufheben.

Also gilt $\vec{F'} = -\vec{F}$

Diese zweite Kraft $\vec{F'}$ heisst ***Trägheitskraft***.

Ist Ihnen der Name klar? Bedenken Sie, wie wichtig in unseren Überlegungen immer das Trägheitsgesetz war.

Stellen wir uns neben den Wagen. Dann wissen wir, dass die Feder der Kugel genau die Beschleunigung $\vec{a}$ des Wagens erteilt. Hat die Kugel die Masse m, so ist die Kraft $\vec{F}$ der Feder gleich $m \cdot \vec{a}$. Dann ist also die Trägheitskraft $\vec{F'}$ = - $m \cdot \vec{a}$



Aufgabe A.3: **"Im anfahrenden Zug"**

Zwischen dem Nichtraucher- und dem Raucherabteil befindet sich in den Zügen eine Pendeltüre. Beschreiben Sie die Bewegung der Türe beim Anfahren des Zuges aus zwei Standpunkten:

- als Kondukteur im Zug
- als Bahnbetriebsdisponent auf dem Perron

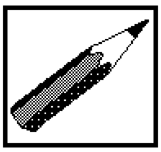
Notieren Sie sich die Antwort in Stichworten und sehen Sie dann nach der Lösung am Ende dieses Kapitels. Ist Ihre Antwort falsch oder können Sie sie nicht finden, so studieren Sie noch einmal die obige Antwort.

Es gibt also offenbar Systeme in denen das Trägheitsgesetz gilt und solche, in denen es *nicht* gilt und *zusätzliche Trägheitskräfte* zur Beschreibung der Bewegungen angenommen werden müssen.

Systeme, in denen das Trägheitsgesetz gilt, nennen wir *Inertialsysteme*.

Ein ruhendes System ist also ein Inertialsystem. Was ist aber ein ruhendes System? Machen wir einen kleinen Ausflug in die Geschichte der Physik:

Eine Frage hat in der Zeit vor Einstein viele Physiker und Physikerinnen beschäftigt: Gibt es unter den vielen unbeschleunigten Systemen ein absolut ruhendes System? Ein System, von dem aus alle anderen Systeme dann einfach beurteilt werden können?



Aufgabe A.4:

Nehmen Sie das Lexikon aus unserer kleinen Bibliothek und lesen Sie den Artikel "Äther" (Unterabschnitt "Physik") nach. Falls kein Lexikon vorhanden ist, so lesen Sie den nachfolgenden Text.

Die Antwort fällt uns seit Einstein leicht: Wenn es ein Inertialsystem gibt, so gibt es noch viele andere. Alle Systeme, welche sich bezüglich eines Inertialsystems mit konstanter Geschwindigkeit bewegen, sind auch Inertialsysteme. Das Trägheitsgesetz gilt dann in allen diesen Systemen. Denn es sagt, dass Körper, auf die keine resultierende Kraft wirkt, in Ruhe sind oder sich mit ***konstanter Geschwindigkeit*** *bewegen.*

In der Zeit vor Einstein waren diese Vorstellungen noch nicht so klar. Einige (unter ihnen auch Isaac Newton) glaubten, es müsse doch ***ein*** *bestimmtes unbeschleunigtes System geben. Sie nannten dieses Inertialsystem "Äther", eine Art ganz feiner Luft, die das ganze Universum erfüllt, und durch die sich auch die Erde hindurchbewegt.*

Inertialsysteme sind wichtig in der Physik. Darin ist nämlich die Beschreibung der physikalischen Abläufe am einfachsten, da keine Trägheitskräfte eingeführt werden müssen. Wir können so rechnen, wie wir es uns auf der Erde gewohnt sind.

A.3 Inertialsysteme genau betrachtet

So einfach, wie die Sache auf den ersten Blick aussieht, ist sie leider nicht. Betrachten Sie noch einmal Figur A.4. Der eine Beobachter steht am Boden, der andere auf dem beschleunigten Wagen. Der Unterschied in der Beschreibung der Bewegung durch die beiden Beobachter wird durch die *relative* Beschleunigung der Systeme verursacht. Eine relative Beschleunigung kann aber auch auftreten, wenn beide Systeme in unterschiedlicher Weise beschleunigt sind und keines der beiden ruht.

Das System, das wir für unsere Überlegungen benutzen wollen, besteht aus einem Raum, in dem sich ein Beobachter mit einer Federwaage befindet. Der Beobachter hat keine Informationen über die Welt ausserhalb seines Raumes.

Schauen wir uns zunächst den Fall an, wo zwei Beobachter im schwerelosen Raum dieselbe *gleichmässige*, *geradlinige* und *gleichgerichtete* Beschleunigung $a = 10\ m/s^2$ erfahren:

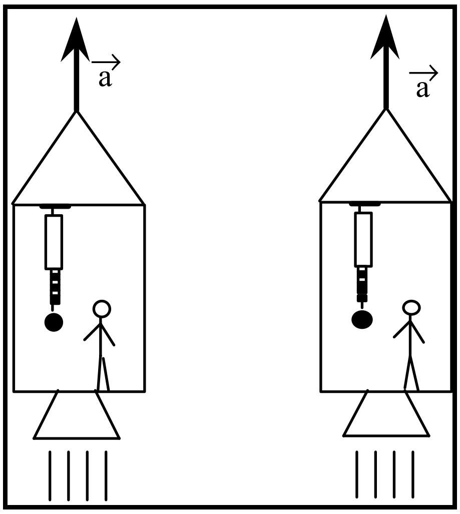


Fig. A.5

An den Federwaagen sind Kugeln von je 100 g Masse angebracht. Durch die von der Beschleunigung herrührende Trägheitskraft zeigen die Federwaagen in beiden Raketen eine Kraft von 1 N an. Die Beobachter können durch ein Fenster einander zuschauen. Beide machen Wurfexperimente und werten sowohl die eigenen, wie auch jene des Kollegen in der andern Rakete aus. Da keine relative Beschleunigung zwischen den beiden Systemen besteht, kommen beide bei allen Experimenten auf dieselbe Beschreibung der Bewegungen.

Wir lassen zwei weitere Personen dieselben Experimente auf der Erde durchführen:

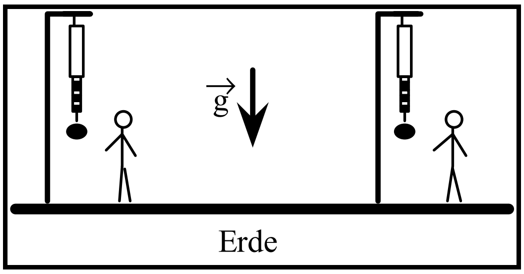


Fig. A.6

Sie erhalten nicht nur gegenseitig dieselben Beschreibungen für die Bewegungen, sondern kommen auch auf genau dieselben Resultate wie ihre Kollegen in den Raketen. Auch auf der Erde hängen Massen von je 100 g an den Federwaagen, so dass diese 1 N (verursacht durch die Erdbeschleunigung) anzeigen. Wir betrachten die Erde als Inertialsystem. Hier *gilt* nämlich das Trägheitsgesetz.

Vergleichen wir die beiden Situationen einmal direkt: Wir nehmen einen Beobachter in einer geradlinig und gleichmässig beschleunigten Rakete und einen Beobachter in einem fensterlosen Raum auf der Erde:

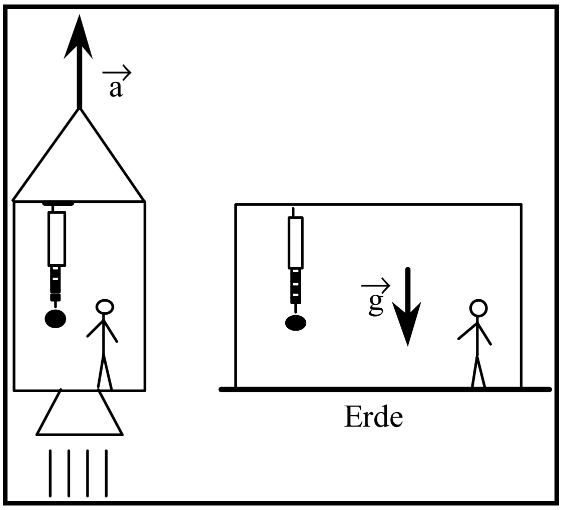


Fig. A.7

Beide können nicht nach aussen schauen und sollen anhand Ihrer Beobachtungen an der Federwaage entscheiden, welche Situation für sie zutrifft.

Beide können die Frage *nicht* entscheiden! Der Beobachter in der Rakete hat die Freiheit *anzunehmen*, dass die von ihm beobachtete Kraft durch Gravitation erzeugt wird und somit *keine* Trägheitskraft ist. Er hat damit *festgelegt*, dass er sich in einem Inertialsystem befindet.

Wir sind jetzt in der Lage Inertialsysteme "herzustellen": Wir wählen ein beliebiges System. An dieses stellen wir folgende Bedingung: Es muss im schwerelosen Raum *geradlinig* und *gleichmässig* beschleunigt sein. Wir *legen* nun *fest*, dass die linke Rakete in Figur A.5 ein

Inertialsystem sein soll. Jede andere Rakete, die in dieselbe Richtung dieselbe geradlinige und gleichmässige Beschleunigung erfährt, ist nun *ebenfalls ein Inertialsystem* (es liegt ja *keine relative* Beschleunigung vor). Dieser Beschleunigung kann noch eine konstante Geschwindigkeit in eine beliebige Richtung überlagert werden, denn dies verändert die Anzeige der Federwaagen nämlich nicht.

Was haben wir mit unseren Überlegungen erreicht? Wir können in jedem System mit konstanter Trägheitskraft die Formeln der irdischen Physik anwenden, indem wir $\vec{g}$ durch die entsprechende Trägheitsbeschleunigung ersetzen. Diese können wir z.B. mit einer Masse und einer Federwaage bestimmen: $"\vec{g}" = \vec{a'} = -\frac{\vec{F'}}{m}$.

Wir haben jetzt also eine ganze Reihe von Systemen, in denen wir wie "zu Hause" rechnen können. Das ist erfreulich. Störend an unseren Überlegungen ist die Tatsache, dass an die Stelle von klar festgelegten Prinzipien, eine gewisse Willkür getreten ist. Wir können *wählen*, ob das Trägheitsgesetz gelten soll oder nicht. Dies geschieht dadurch, dass wir für eine im System beobachtete Kraft die Gravitation oder die Trägheit als Ursache annehmen.

Wir haben folgende Situation:
- Eine *äussere* Gravitationskraft verletzt das Trägheitsgesetz *nicht*.
- Eine durch *äussere* Beschleunigung des Systems verursachte Trägheitskraft *verletzt* das Trägheitsgesetz.
- Als Beobachter im System kann ich die beiden Fälle *nicht* unterscheiden.

Albert Einstein hat diesen gordischen Knoten gelöst:
Die Tatsache der Ununterscheidbarkeit der Ursache dieser äusseren Kräfte betrachtet er als grundlegendes Naturgesetz. Er nennt es das *Äquivalenzprinzip*.

Nun gibt er eine strengere **Definition** der Inertialsysteme:

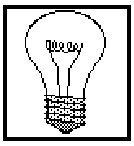
Systeme, in denen keine ununterscheidbaren und von aussen verursachten Trägheits- oder Gravitationskräfte wirken, sind *Inertialsysteme*.

In einem solchen Inertialsystem gilt das Trägheitsgesetz ausnahmslos.

Aus dieser Definition folgt, dass sich *keiner* der Beobachter in Figur A.7 in einem Inertialsystem befindet. Damit sind nicht nur unsere Schwierigkeiten aus dem Weg geräumt, sondern es ist auch der Grundstein zur *Allgemeinen Relativitätstheorie* gelegt. Aus dieser folgen dann die Krümmung des Raumes, schwarze Löcher und weitere faszinierende Erkenntnisse.

ACHTUNG!

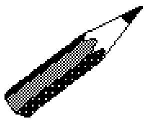
Für uns bleibt die Erdoberfläche auch in Zukunft ein Inertialsystem. Wir nehmen stillschweigend zu jedem System, das wir betrachten, die Erde dazu. Damit ist die Erdanziehungskraft *keine* äussere Kraft.



Wir fassen zusammen:

In geradlinig beschleunigten oder rotierenden Bezugssystemen treten zusätzliche Kräfte auf, die Trägheitskräfte. Sie werden eingeführt, damit das Trägheitsgesetz weiterhin gilt. Erfährt das System die Beschleunigung $\vec{a}$, so ist die Trägheitskraft $\vec{F'}$ auf einen Körper der Masse m gleich $\vec{F'} = -m \cdot \vec{a}$

Die Zentrifugalkraft ist ein Spezialfall einer Trägheitskraft.



Aufgabe A.5: "Das Pendel"

Der Wagen der untenstehenden Figur A.8 bewegt sich in der angegebenen Richtung mitkonstanter Beschleunigung.

a) Man zeige, dass der gleichbleibende Ausschlag des angehängten Pendels ein Mass für die Beschleunigung ist.

b) Welcher Winkel φ stellt sich ein, wenn die Beschleunigung $^1/_2$ g beträgt?

(Läuchli/Müller S. 115, Aufgabe A4-426)

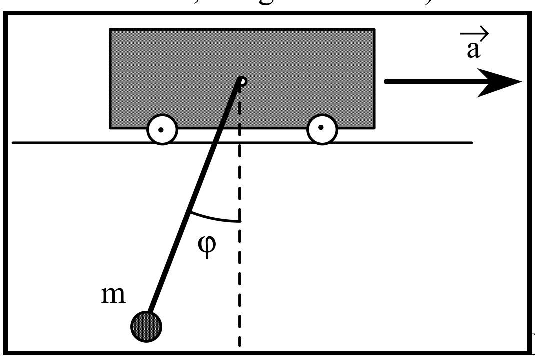


Fig. A.8

Ist Ihre Lösung falsch, so lesen Sie noch einmal aufmerksam die obige Zusammenfassung durch.

Aufgabe A.6:

Sie haben das kleine Experiment mit der Kugel aus Metallblättern, die sich auf der Schwungmaschine verformte, gemacht. Stellen Sie sich vor, Sie befinden sich auf der Kugel. Wie erklären Sie sich dann die Verformung Ihres Untergrundes? Und wie erklären Sie sich die Verformung, wenn Sie neben der Kugel stehen?

Notieren Sie sich die Antwort auf die beiden Fragen in Stichworten und vergleichen Sie dann mit der Lösung am Ende dieses Kapitels.

Haben Sie die Aufgabe lösen können, dann sollten Sie jetzt auch den Kapiteltest bestehen. Gehen Sie und lassen Sie sich prüfen! Wenn Sie Mühe gehabt haben, dann lesen Sie noch einmal die Zusammenfassung am Ende des Abschnittes A.1.

Übrigens: Zum Thema "Erde als Inertialsystem" wäre noch einiges zu sagen. Galilei soll gesagt haben:

"Und sie dreht sich doch."

Was denken Sie sich dazu?

Lösungen und Hinweise zu den Aufgaben

Lösung A1:"Die Fliehkraft wirkt allein"

Die Kugel bewegt sich im nächsten Augenblick vom Zentrum weg nach aussen. Sie wird dabei durch die Zentrifugalkraft beschleunigt, die jetzt alleine wirkt. Später bewegt sie sich weiter nach aussen, bleibt aber, von der Kreisscheibe aus gesehen zurück.

Ein Beobachter neben der Scheibe sieht dabei die Kugel tangential auf einer Geraden wegfliegen.

(Falls Sie mit dieser Beschreibung Mühe haben, zeichnen Sie auf dem Kreisbogen und auf der Tangente die Positionen nach jeweils gleichen Zeitintervallen (z.B. $\Delta t = T/72$).

Lösung A.2: "Ein Mensch am Äquator ..."

Betrachten Sie den Äquator als Rand einer Kreisscheibe, die durch den Erdmittelpunkt geht. Dann können wir unsere Formel für die Zentrifugalkraft benutzen und einsetzen:

m = 70 kg; r = $6.37 \cdot 10^6$ m; T = 86'400 s $\Rightarrow \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{86400s} = 7{,}27 \cdot 10^{-5} s^{-1}$

$$F_Z^{'} = m \cdot \omega^2 \cdot r = 70kg \cdot \left(\frac{2\pi}{86400s}\right)^2 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6 m = 2{,}36N$$

Die Gewichtskraft ist: F= m·g = 700 N. In Prozent ist damit der Anteil der Zentrifugalkraft an der Gewichtskraft $\frac{F_Z^{'}}{F_G} = \frac{2{,}36N}{700N} = 0{,}0034 = 0{,}34\%$.

Durch die Zentrifugalkraft sind wir am Äquator also um 0.34 % "leichter".

Die Situation ist ähnlich wie beim Katzengras auf der rotierenden Scheibe: Stell dir vor, die Person misst mit einer Federwaage ihr Gewicht. Nach unten wirkt die Gewichtskraft und, infolge der Erdrotation, nach oben die Zentrifugalkraft. Die auf der Waage abgelesene Gesamtkraft ist also: $F_{Ges} = F_G - F_Z^{'}$

Lösung A.3: "Im anfahrenden Zug"

Kondukteur: Ich bin in einem beschleunigten System, auf alles wirken Trägheitskräfte. Soll etwas in Ruhe sein, dann muss eine Kraft ausgeübt werden, welche die Trägheitskraft aufhebt. Den Scharnieren der Türe gelingt das nicht sehr gut, darum geht die Türe auf. Die Trägheitskraft öffnet sie.

Bahnbetriebsdisponent: Der Zug beschleunigt. Er versucht, allen Dingen in ihm eine beschleunigende Kraft mitzuteilen. Die Scharniere der Türe sind nun aber sehr ungünstig, um eine Kraft zu übertragen. Die Türe bleibt deshalb etwas zurück, dem Trägheitsgesetz gehorchend will sie in Ruhe bleiben.

Lösung A.5: "Das Pendel"

Vom Wagen aus gesehen sind die wirkenden Kräfte die Gewichtskraft $\vec{F_G} = m \cdot \vec{g}$, die Trägheitskraft $\vec{F'} = -m \cdot \vec{a}$ und die Kraft des Fadens $\vec{F_S}$ (siehe linke Skizze).

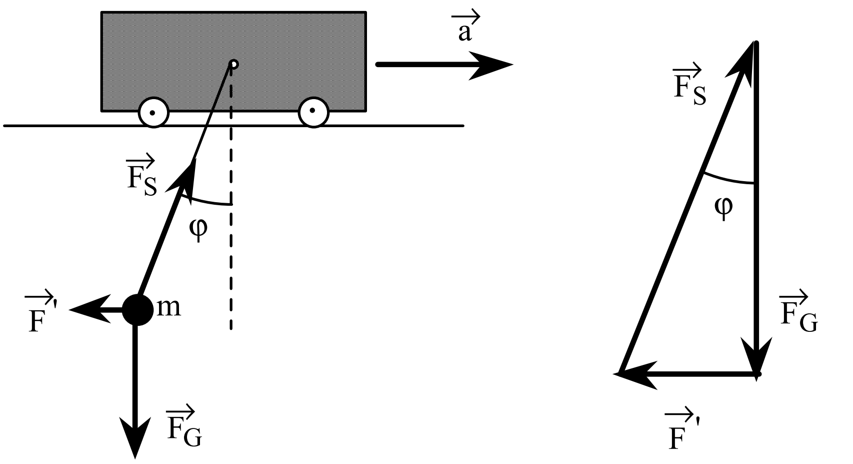


Fig. A.9

Vom Wagen aus gesehen ist die Kugel in Ruhe. Also heben sich die drei Kräfte auf, wie in der oberen Skizze rechts gezeichnet. Dann können wir aber leicht den Tangens des Winkels ausrechnen:

$$\tan\varphi = \frac{F_Z'}{F_G} = \frac{m \cdot a}{m \cdot g} = \frac{a}{g} = \frac{1}{2} \qquad \varphi = 26{,}6°$$

Lösung A.6

Auf der Kugel stehend:

Ich bin in einem System, in dem es Fliehkräfte gibt. Alles fliegt nach aussen weg, wenn keine Kraft es hält. Darum verformt sich die Kugel, bis die gebogenen Metallblätter genügend Spannkraft aufweisen, der Fliehkraft entgegenzuwirken.

Neben der Kugel stehend :

Die Kugel rotiert. Also wirkt überall die Zentripetalkraft Sie kommt zustande durch die Spannkraft der Federblätter und ist erst dann genügend gross, wenn sich die Federblätter etwas verformt haben.

Kapiteltests

Test für Kapitel 1

Testaufgabe 1.1. (mündlich)

Variante 1: Wie lautet die Definition der Winkelgeschwindigkeit ω und wie ist ihre Einheit ? Was können Sie sich unter einer Winkelgeschwindigkeit von 2 s^{-1} vorstellen?

Variante 2: Ein Körper durchläuft in 3 s einen vollen Kreis. Wie gross ist seine Winkelgeschwindigkeit? Was können Sie sich unter einer Winkelgeschwindigkeit von rund 2 s^{-1} vorstellen?

Testaufgabe 1.2. (mündlich)

a) Wie würde die Definition der Winkelbeschleunigung lauten, wenn Sie Ihr Wissen von der linearen Bewegung auf die Kreisbewegung übertragen? Sie können Ihre Erklärungen auf einem Blatt ergänzen.

b) Wie gross ist die Winkelbeschleunigung im Fall der gleichförmigen Kreisbewegung?

Testaufgabe 1.3. (mündlich)

Sie kennen die Formel für den Kreisumfang: U = r 2π. Sie haben im Kapitel 1 das Bogenmass kennengelernt. Sehen Sie einen Zusammenhang zwischen der Formel für den Umfang des Kreises und dem Bogenmass? Lässt sich die Formel für den Umfang anders interpretieren ?

Testaufgabe 1.4. (schriftlich)

a) Die Erde hat einen Radius von r_E = 6370 km. Wie gross ist die Bahngeschwindigkeit eines Gegenstandes auf dem Äquator aufgrund der Erdrotation ?

(Bitte kommentieren Sie Ihre Überlegungen. Sie können dazu ein Blatt und den Taschenrechner gebrauchen.)

b) Um wieviel Prozent erhöht sich die Bahngeschwindigkeit, wenn man auf dem Äquator einen Turm mit der Höhe h = 300 m besteigen würde?

Testaufgabe 1.5. (schriftlich)

Auf herkömmlichen (alten) Langspielplatten ist die Toninformation in einer spiralförmigen Rille eingeprägt. Die Nadel fährt diese Rille von aussen nach innen ab und übernimmt die eingeprägten periodischen Unebenheiten, die dann als Ton wiedergegeben werden. Die Platte dreht sich 33 mal in der Minute.

a) Wie gross ist die Winkelgeschwindigkeit der Platte ? Die äusserste Rille hat 15 cm Radius von.

b) Wie schnell dreht sich die Platte unter der Nadel hindurch ?

Test für Kapitel 2

Testaufgabe 2.1. "Geschwindigkeit und Beschleunigung" (mündlich)
"Bei einer gleichmässigen Kreisbewegung ist der Körpers zwar immer gleich schnell, doch erfährt er trotzdem eine Beschleunigung." Diskutieren Sie diese Aussage.

Testaufgabe 2.2. "Zentripetalkraft" (schriftlich)
Was ist die Zentripetalkraft? Wo greift sie an? Welche Richtung hat sie? Von welchen Grössen hängt ihr Betrag ab? Wie kann man den Betrag aus diesen Grössen berechnen?

Testaufgabe 2.3. "Verdoppelung des Kreisbahnradius" (schriftlich)
Ein Gummiball beschreibt eine gleichmässige Kreisbewegung auf einer horizontalen Kreisbahn von 0.5 m Radius. An einer Federwaage kann man für die Zentripetalkraft den Betrag 2 N ablesen. Nun wird die Kreisbewegung mit dem Radius 1.0 m wiederholt. Welchen Wert zeigt die Federwaage jetzt an? Geben Sie genau an, welche Grössen bei dieser Wiederholung mit doppeltem Radius gleich sind wie vorher.

Test für Kapitel 3

Testaufgabe 3.1: "Die schnelle Wende" (mündlich)
Pfadfinder machen im Wald ein Wettrennen, bei welchem in einer gewissen Entfernung ein junges Bäumchen umlaufen und dann wieder zum Startort zurückgerannt werden muss. "Strolch" vollzieht die Wende um das Bäumchen herum in der Weise, dass er - ohne abzubremsen - mit der Hand das Bäumchen packt und sich um den dünnen Stamm herumschwingen lässt. Er beschreibt somit einen Teil einer Kreisbahn. Erklären Sie, wie bei diesem Beispiel die erforderliche Zentripetalkraft zustande kommt. Was ändert sich an der Erklärung, wenn der viel schwerere "Rino" die Wende ebenso vollziehen will? Wann müssen die Läufer das Bäumchen wieder loslassen?

Testaufgabe 3.2: "Reibung" (schriftlich)

a) Auf einer horizontalen Kreisscheibe liegen zwei Holzstücke, deren Oberflächen gleich beschaffen sind und die dieselbe Masse haben. Holzstück A ist doppelt so weit vom Kreismittelpunkt entfernt wie Holzstück B. Nun lässt man die Scheibe mit wachsender Frequenz rotieren. Welches Holzstück rutscht zuerst von seiner Position auf der Scheibe weg? Begründen Sie die Antwort.
b) Nun wird versucht, durch geeignete Wahl der Masse von Holzstück A zu erreichen, dass beide Klötzchen gleichzeitig zu rutschen beginnen. Ist dies möglich? Wenn nein, warum nicht? Wenn ja, um welchen Faktor ist die Masse von Holzstück A zu verändern?

Testaufgabe 3.3: "Looping" (vgl. Skizze) (schriftlich)

Eine Kugel der Masse m wird vom Punkt A losgelassen. Sie rollt die schiefe Schiene hinunter und durchrollt danach den vertikalen Looping. Der Startpunkt A wird so gewählt, dass die Kugel die Looping-Schiene auch im höchsten Punkt H noch deutlich berührt.

a) Zeichnen Sie im höchsten Punkt H und im tiefsten Punkt T des Loopings alle Kräfte ein, welche an der Kugel angreifen. Bezeichnen Sie diese Kräfte, benennen Sie diese unterhalb der Skizze und schreiben Sie dazu, was die Ursache dieser Kraft ist. Die Grösse der Kräfte muss nicht exakt stimmen, doch müssen Kräfte, die in T und in H gleich gross sind auch gleich gross gezeichnet werden. Aus den Längen der Kraftpfeile muss klar hervorgehen, welche Kräfte grösser sind als andere.

b) Welche Richtung hat die Resultierende der an der Kugel angreifenden Kräfte in T bzw. in H? Wo ist sie grösser? Weshalb?

c) Erklären Sie, weshalb die Kugel den Looping selbst ohne irgendwelche Reibungsverluste nicht durchrollen kann, wenn der Startpunkt A auf der Höhe des höchsten Punktes H gewählt wird. Was würde in diesem Fall passieren?

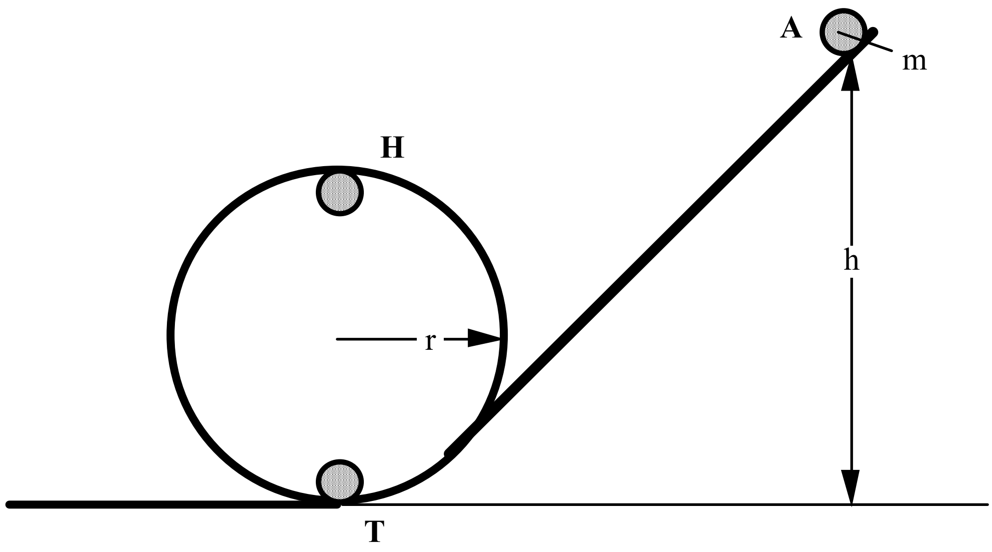


Fig. Z1.1

Test für Kapitel 4

Testaufgabe 4.1. (mündlich)

Nennen Sie ein Beispiel für Kreisbewegung durch Schrägstellung, das nicht in diesem Kapitel vorkommt. Welche Kräfte wirken dabei mit? Welche Richtung haben sie? Welches ist jeweils die Ursache dieser Kräfte? Welches ist die Resultierende dieser Kräfte? In welcher Beziehung stehen die Kräfte zueinander? (Mögliche Hilfe: Beim Sport kommen viele Beispiele vor.)

Testaufgabe 4.2. (schriftlich)

Beim 200m-Lauf werden die ersten 100m in der Kurve gelaufen. Die innerste Bahn (Nr. 1) hat einen Radius von 36.50 m, jede Bahn ist 1.22m breit. Ein Weltklasse-Sprinter läuft die 200m in rund 20,0 Sekunden.

Wie stark muss sich dieser Sprinter auf Bahn 1 nach innen neigen? Wie gross ist die schräge Kraft bei einer Masse von 80 kg?

Spitzensprinter laufen lieber auf Bahn 6 als auf Bahn 1. Es wird sogar behauptet, alle 200m - Weltrekorde seien auf Bahn 5 oder weiter aussen gelaufen worden. Was ist Ihre Meinung dazu.

Test für das Additum

Testaufgabe A.1 (mündlich)

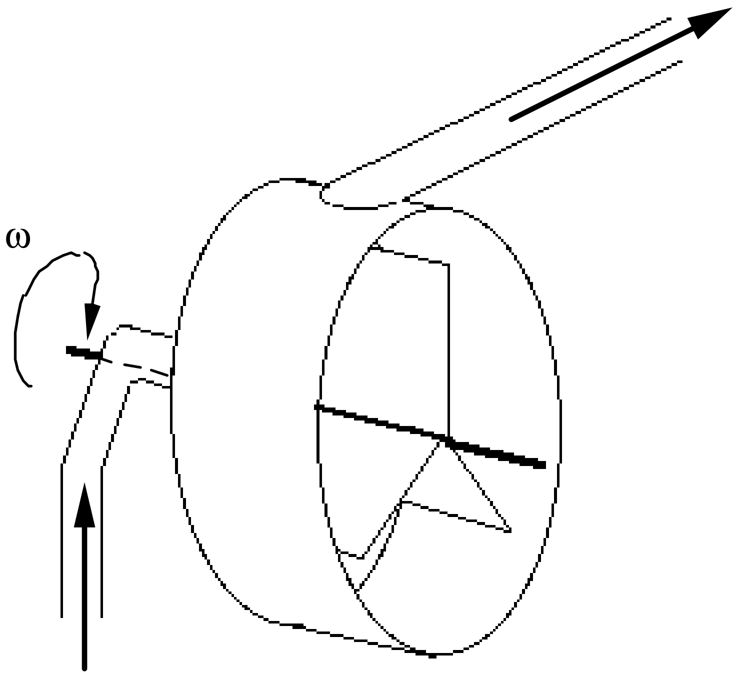


Fig. Z1.2

Sie sehen hier eine Kreiselpumpe. Die Flügel im Innern werden durch einen Motor angetrieben. In der Mitte ist eine Zuleitung; am Rande, tangential, eine Ableitung. Erklären Sie, wie die Pumpe funktioniert ! Zuerst von aussen gesehen, dann von innen, vom Standpunkt des Wassers aus.

Lösungen zum Test für Kapitel 1

Lösung Testaufgabe 1.1. (mündlich)

Variante 1: Die Winkelgeschwindigkeit ist definiert als Winkel, das Verhältnis des überstrichenen Winkels zur dafür benötigten Zeit: $\omega = \Delta\varphi/\Delta t$. Da der Winkel im Bogenmass gemessen wird, hat die Winkelgeschwindigkeit die Einheit $rad \cdot s^{-1}$ (Es geht hier um eine sinngemässe Wiedergabe der Definition!)

Variante 2: $\omega = 2\ s^{-1}$ bedeutet, dass pro Sekunde ein Winkel von 2 rad überstrichen wird, dies sind rund 120°. (Es geht hier um eine Veranschaulichung dieser Grösse.)

Lösung Testaufgabe 1.2. (mündlich)

a) Die Beschleunigung der linearen Bewegung ist definiert als das Verhältnis der Geschwindigkeitsänderung zur dafür benötigten Zeit: $a = \Delta v/\Delta t$. Analog ist die Winkelbeschleunigung zu definieren: Winkelbeschleunigung = $\Delta\omega/\Delta t$

b) Bei der gleichförmigen Kreisbewegung ist ω eine Konstante. Somit ist die Änderung der Winkelgeschwindigkeit null. $\Rightarrow$ $\Delta\omega/\Delta t = 0$

Lösung Testaufgabe 1.3. (mündlich)

Der Umfang kann als Kreisbogen zum Winkel 2π interpretiert werden. Die Formel für den Umfang ist also nichts anderes als ein Spezialfall der Formel für den Kreisbogen b: $b = r\,\varphi$

Lösung Testaufgabe 1.4. (schriftlich)

a) Sozusagen dieselbe Aufgabe wurde im Leitprogramm durchexerziert.

Die Umdrehungszeit der Erde ist 24 Stunden. In Sekunden ausgedrückt ergibt dies für T: $T = 24{*}60{*}60s = 86400\ s$. Aus $\omega = 2\,\pi / T$ und $v = r\,\omega$ ergibt sich für die Bahngeschwindigkeit v:

$$v = r\cdot 2\,\pi / T = 6'370'000\ m \cdot 2\,\pi / (86400\ s) = 463\ m\ s^{-1}$$

b) Die Bahngeschwindigkeit ist proportional zum Radius, da die Winkelgeschwindigkeit ja konstant ist. Die Bahngeschwindigkeit erhöht sich als im Verhältnis der Entfernungen vom Erdmittelpunkt:

$$\frac{r_E + h}{r_E} = \frac{63703 km}{6370 km} = 1{,}000047$$

Dies entspricht einer Erhöhung um 0.0047 %

Achtung: Hat der Schüler die ganze Aufgabe a) nochmals gelöst und numerisch einen anderen Radius (r_E + h) eingesetzt, oder hat er die Proportionalität zwischen Geschwindigkeit v und Radius r erkannt?

Lösung Testaufgabe 1.5. (schriftlich)

a) Die Frequenz beträgt 33 min^{-1}. In der Einheit s^{-1} ist sie somit $f = 33/60s = 0.55\ s^{-1}$.
Die Winkelgeschwindigkeit ist $\omega = 2\pi f = 3.456\ s^{-1}$

b) Die Bahngeschwindigkeit ist $v = r \cdot \omega = 0.15m \cdot 3.456\ s^{-1} = 0.518\ ms^{-1}$

Lösungen zum Test für Kapitel 2

Lösung Testaufgabe 2.1: "Geschwindigkeit und Beschleunigung" (mündlich)

Diese Aussage ist richtig. Der Betrag der Geschwindigkeit bleibt bei einer gleichmässigen Kreisbewegung konstant. Die Richtung der Geschwindigkeit ändert sich jedoch dauernd. Die Geschwindigkeit als vektorielle Grösse ändert sich. Somit erfährt der Körper auch eine Beschleunigung: $\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$. Diese muss rechtwinklig zur Momentangeschwindigkeit stehen, damit sich keine Betragsänderung der Geschwindigkeit ergibt.

Lösung Testaufgabe 2.2: "Zentripetalkraft" (schriftlich)

Die Zentripetalkraft ist diejenige Kraft, welche auf einen Körper wirken muss, damit er eine gleichmässige Kreisbewegung ausführt . Sie muss am kreisenden Körper angreifen. Ihre Richtung zeigt zum Zentrum der Kreisbahn. Ihr Betrag hängt ab vom Radius r der Kreisbahn, der Masse des Körpers und der Bahngeschwindigkeit v bzw. der Winkelgeschwindigkeit ω bzw. der Umlaufszeit T bzw. der Frequenz f.

$$F_Z = m \cdot \omega^2 \cdot r = \frac{m \cdot v^2}{r}, \text{ wobei } \omega = 2\pi \cdot f = \frac{2\pi}{T} \text{ und } v = \omega \cdot r$$

Lösung Testaufgabe 2.3: "Verdoppelung des Kreisbahnradius" (schriftlich)

Es gibt folgende zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Wird die Bahngeschwindigkeit v konstant gehalten, so ist nur noch eine halb so grosse Zentripetalkraft nötig, also 1 N.
2. Wird hingegen die Winkelgeschwindigkeit ω (oder die Umlaufszeit T oder die Frequenz f) konstant gehalten, so ist eine doppelt so grosse Zentripetalkraft erforderlich, also 4 N.

Lösungen zum Test für Kapitel 3

Lösung Testaufgabe 3.1. "Die schnelle Wende" (mündlich)

"Strolch bewegt sich vorerst (näherungsweise) gleichförmig geradlinig. Nach dem Trägheitsgesetz (Newton I) ist dabei die resultierende Kraft auf ihn null. Wenn er nun das Bäumchen packt, zieht er daran mit einer gewissen Kraft. Nach dem Wechselwirkungsgesetz (Newton III) übt gleichzeitig das Bäumchen auf "Strolch" eine entgegengesetzt gerichtete gleichgrosse Kraft aus. "Strolch" erfährt also eine Resultierende in Richtung zum Stamm des Bäumchens. Diese Resultierende ist die Zentripetalkraft. "Strolch" erfährt damit eine Beschleunigung (Newton II), welche die Richtung seiner Geschwindigkeit ändert und ihn auf eine Kreisbahn zwingt.

"Rino" hat wegen der grösseren Masse eine grössere Trägheit. Er wird deshalb beim Packen des Bäumchens auf dieses eine grössere Kraft ausüben, somit auch eine grössere Reaktionskraft erfahren. Die Resultierende auf Rino ist im Verhältnis zu seiner Masse grösser, er erfährt also eine grössere Zentripetalkraft. Die Zentripetalbeschleunigung wird jedoch wieder gleich gross, da die grössere Zentripetalkraft durch die grössere Masse geteilt wird. "Rinos" Kreisbahn ist deshalb bei gleicher Geschwindigkeit dieselbe wie diejenige von "Strolch". (Vielleicht wird das dünne Bäumchen durch die grössere Kraft von "Rino" etwas verbogen, sodass möglicherweise eine etwas grössere Kreisbahn entsteht.)

Die Pfadfinder müssen das Bäumchen nach einer halben Drehung wieder loslassen. Ihre Bewegungsrichtung ist dann entgegengesetzt zur ursprünglichen Laufrichtung. Beim Loslassen fällt die Zentripetalkraft weg und die Burschen verlassen die Kreisbahn in tangentialer Richtung.

Lösung Testaufgabe 3.2. "Reibung" (schriftlich)

a) Kräfte auf das Holzstück:
- normal zur Scheibe: Gewichtskraft F_G und Normalkraft F_N: $F_N = F_G = m\,g$
- parallel zur Scheibe: nur Haftreibung $F_{RH} \leq \mu_H F_N = \mu_H m\,g$

Diese liefert die Zentripetalkraft $F_z = m\,\omega^2\,r$

Somit ist $m\,\omega^2\,r \leq \mu_H\,m\,g$, wenn der Körper auf der Scheibe drehen soll. d.h. $\omega^2 \leq \frac{\mu_H \cdot g}{r}$

Je grösser der Radius r, desto kleiner die maximale Winkelgeschwindigkeit , bei welcher der Klotz gerade noch hält.

Das Holzstück A wird somit bei kleinerer Winkelgeschwindigkeit wegrutschen.

b) Wie oben gezeigt, ist die maximale Winkelgeschwindigkeit unabhängig von der Masse. Eine grössere Masse ergibt zwar eine grössere maximale Reibungskraft, aber sie benötigt auch eine grössere Zentripetalkraft. Die Grenze wird deshalb bei der gleichen Winkelgeschwindigkeit erreicht, wie bei einer kleineren Masse. Eine Korrektur durch Veränderung der Masse ist somit nicht möglich.

Lösung Testaufgabe 3.3: "Looping"(schriftlich)

a)

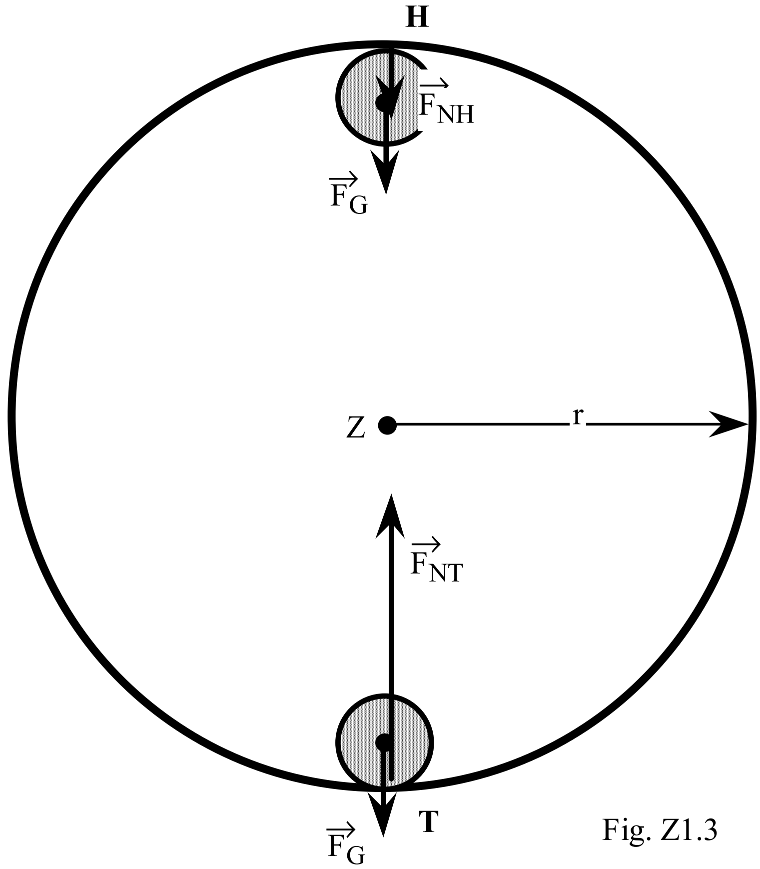


Fig. Z1.3

$\vec{F}_G$ Gewichtskraft, verursacht durch die Erde, stets vertikal nach unten

$\vec{F}_N$ Normalkraft, verursacht durch die Schiene, stets rechtwinklig zur Schiene nach innen.

Grössenbedingungen:

F_G in T und H gleich

in T: $F_{NT} > F_G$

$(F_{NT} - F_G) > (F_{NH} + F_G)$

denn $F_{ZT} > F_{ZH}$ (da $v_T > v_H$)

b) Die Resultierende ergibt die Zentripetalkraft und muss somit zum Kreiszentrum Z zeigen. Sie muss in T grösser sein als in H, da die Kugel in T eine grössere kinetische Energie bzw. eine grössere Geschwindigkeit hat, aber einen Kreis mit gleichem Radius beschreibt.

in T: $\overrightarrow{F_{resT}} = \overrightarrow{F_{NT}} + \overrightarrow{F_G}$ Betrag: $F_{resT} = F_{NT} - F_G$

in H: $\overrightarrow{F_{resH}} = \overrightarrow{F_{NH}} + \overrightarrow{F_G}$ Betrag: $F_{resH} = F_{NH} + F_G$

$F_{resT} > F_{resH} \Rightarrow F_{NT} - F_G > F_{NH} + F_G \Rightarrow F_{NT} > F_{NH} + 2\,F_G$

c) Gemäss Energiesatz wäre die kin. Energie in H gleich gross wie in A, also 0. Der Körper wäre also in H nicht mehr in Bewegung, auch nicht in Kreisbewegung. Es ist somit auch keine Zentripetalkraft erforderlich, aber die Gewichtskraft wirkt vertikal nach unten. Also fällt der Körper von der Schiene nach unten.

Allerdings fällt der Körper schon vor dem Erreichen des höchsten Punktes von der Schiene, da die Gewichtskraft zusammen mit der Normalkraft schon vorher eine Resultierende liefert, welche grösser ist als die nötige Zentripetalkraft.

Lösungen zum Test für Kapitel 4

Lösung Testaufgabe 4.1 (mündlich)

Ich kann hier unmöglich alle Beispiele aufzählen. Motorräder, Flugzeuge, rennende Menschen und Tiere, Rollschuhfahrerin und Surfer.

Die Schwerkraft und eine schräge Kraft mit fester Richtung kommen in den allermeisten Beispielen vor. Die Resultierende dieser zwei Kräfte ist jeweils die Zentripetalkraft und zeigt zum (momentanen) Kreiszentrum.

Lösung Testaufgabe 4.2 (schriftlich)

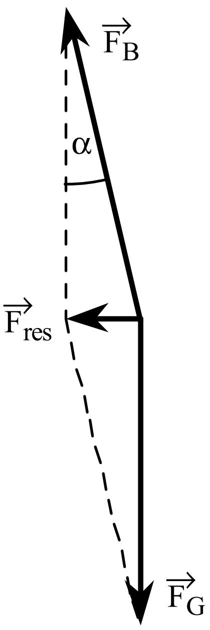


Fig. Z1.4

$v = s/t$ = 200m/20s = 10m/s   m = 80 kg   r = 36,5 m

$\Rightarrow F_{res} = F_z = mv^2/r = 219$ N $F_G = mg = 800$ N

$\alpha = \arctan(F_z / F_G) = 15{,}3°$ $F_B = F_G/\cos\alpha = 830$ N

Für Bahn 6 ist der Radius um 5 x 1.22 m grösser r' = 42,6 m

$\Rightarrow F_{res}' = F_z' = mv^2/r' = 188$ N

$\alpha' = \arctan(F_z'/F_G) = 13{,}2°$ $F_B' = F_G/\cos\alpha' = 822$ N

Die Bodenkraft ist grösser als die Gewichtskraft, auf Bahn 6 um 22 N, auf Bahn 1 jedoch um 30 N. Diese zusätzliche Kraft muss der Sprinter mit seiner Muskelkraft auffangen, was ihn somit auf Bahn 1 mehr ermüdet als auf Bahn 6.

Lösungen zum Test für das Additum

Lösung Testaufgabe A.1 (mündlich)

Von aussen gesehen: Die zuströmende Flüssigkeit wird in Drehung versetzt. Dazu muss die Zentripetalkraft $m\omega^2 r$ wirken, die allein durch die Reibung in der Flüssigkeit zustande gebracht wird. Werden ω und r immer grösser, so kann die Reibung die Zentripetalkraft nicht mehr übertragen. Die Flüssigkeit fliegt tangential weg, sobald sie einen Ausgang findet. Sie gehorcht dabei dem Trägheitsgesetz.

Vom Wasser aus gesehen: Die zuströmende Flüssigkeit wird in Drehung versetzt. Die Fliehkraft drängt sie nach aussen und presst sie zum Ausflussrohr hinaus.

Mediothek für die Schülerinnen und Schüler

-Dorn, Bader : Physik in einem Band, Hannover, 1976 (Schroedel Schulbuchverlag)

- DMK/DPK: Formeln und Tafeln, Zürich 1988[4] (Orell Füssli Verlag)

- Schreiner J.: Physik 1, Wien 1989 (Verlag Hölder-Pichler-Tempsky)

- Läuchli A.,/Müller F: Physik-Aufgaben, 12. Auflage, Zürich 1987 (Orell Füssli Verlag)

- Mindestens ein grosses enzyklopädisches Lexikon in mehreren Bänden ist für die Recherche notwendig. Es muss unbedingt einen Eintrag über den Fliehkraftregler enthalten.

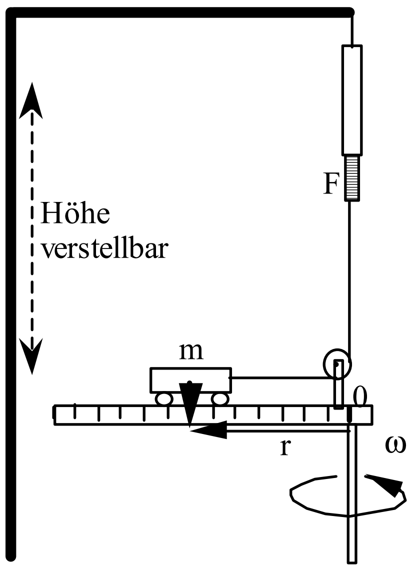
- Auch ein Physiklexikon wäre wünschenswert als Ergänzung zur Enzyklopädie. Vielleicht findet sich auch eine Experimentieranleitung zu diesem Thema.

- Ein allgemeines Lexikon z.B.:
  Göschel H.(Leitung)/Gurst G.(Red.): Meyers Neues Lexikon, Band 1, 2. Auflage, Leipzig 1972

Experimentiermaterial

für Kapitel 2

- Apparatur:

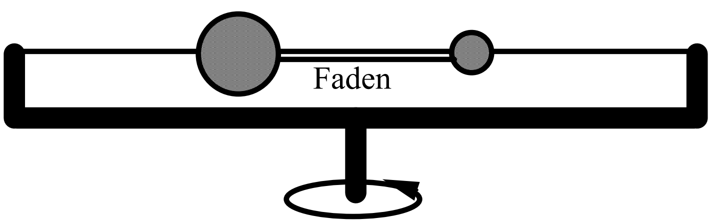


- drehbare Schiene mit Umlenkrolle
- Antriebsmotor mit einstellbarer Drehzahl
- Wagen und Schnur
- Kraftmesser
- Stoppuhr

für Kapitel 3

- Plexiglaszylinder auf Drehachse. Der Boden muss während der Rotation nach unten verschoben werden können. Hand-Schwungmaschine oder Antriebsmotor mit regulierbarer Drehzahl. Zwei Püppchen, die in den Zylinder gestellt werden können, wenn möglich mit verschiedenen Haftreibungszahlen zwischen ihrem Rücken und der Plexiglaswand.

- Hand-Schwungmaschine mit folgendem Aufsatz:



- Tennisball an einer Schnur befestigt, mit einer Schleife (oder mit einem Kugellager) so an einer horizontalen Stange aufgehängt, dass der Ball an der Schnur einen vertikalen Kreis ausführen kann.

für Kapitel 4

- Eine bis zwei gewöhnliche Schüsseln. Je näher der Kugelform umso günstiger. Die entsprechende Anzahl Fünffrankenstücke. Eine Stoppuhr.

- Falls in Ihrer Sammlung ein Fliehkraftregler vorkommt wäre das sehr nützlich. Vielleicht lässt sich auch einer herstellen aus Fischertechnik oder so. Ist aber nicht unbedingt notwendig.

für das Additum

- Katzengras, auf einem mit 78 Touren drehenden Plattenspieler, ca. eine Woche vor der entsprechenden Schulstunde gesät.

- Eine Schwungmaschine, mit einem kugelförmigen Aufsatz aus Metallblättern.

Von den Autoren benutzte Quellen

Kapitel 1

- DMK/DPK: Formeln und Tafeln, Zürich 1988[4] (Orell Füssli Verlag)
- Der neue Brockhaus, Allbuch in fünf Bänden, dritte Auflage, Wiesbaden 1965 (F.A Brockhaus)

Kapitel 2

- Dorn F./ Bader F.: Physik in einem Band, Hannover 1976 (Schroedel Schulbuchverlag)
- Höfling O.: Lehrbuch der Physik, Bonn 1976 (Dümmler Verlag)
- Läuchli A./ Müller F.: Physik Aufgaben, Zürich 1987 (Orell Füssli Verlag)
- Goscinny / Uderzo: Asterix der Gallier, Stuttgart 1984 (Delta und Horizont Verlag)

Kapitel 3

- DMK/DPK: Formeln und Tafeln, Zürich 1988[4] (Orell Füssli Verlag)
- Läuchli A./ Müller F.: Physik Aufgaben, Zürich 1987 (Orell Füssli Verlag)
- Schreiner J.: Physik 1, Wien 1989 (Verlag Hölder-Pichler-Tempsky)
- Mathelitsch L.: Physikaufgaben 1, Wien 1990 (Verlag Hölder-Pichler-Tempsky)
- Dorn F./ Bader F.: Physik in einem Band, Hannover 1989 (Schroedel Schulbuchverlag)

Additum

- Schreiner J.: Physik für die Sekundarstufe II, Teil I, Aarau 1977 (Diesterweg, Salle Sauerländer).
- Sexl, / Raab / Streeruwitz: Physik, Teil 3, 1. Aufl., Wien 1977 (Salzer-Ueberreuter)
- Känzig, W.: Mechanik und Wellenlehre, 1. Aufl., Zürich 1981 (vdf)

Hinweise für die Lehrerinnen und Lehrer

Allgemeines zum Unterrichten mit ETH-Leitprogrammen

Leitprogramme sind ...

... schriftliches Selbststudienmaterial für die einzelnen SchülerInnen,

... eingerichtet für Zeitspannen von etwa 3 bis 12 Lektionen,

... unterteilt in ein Fundamentum (= Grundstock für alle) und mehrere, unabhängige Addita mit unterschiedlicher Thematik und anregendem Zusatzstoff für Schnelle, Interessierte,

... abwechslungsreich dadurch, dass Experimente, Videosequenzen, Lektüren in der Handbibliothek usw. eingebaut sind,

... mit der Möglichkeit zu ständiger Selbstkontrolle durch Zusammenfassungen, Fragen, Übungs- und Kontrollaufgaben bestückt,

... mit Kontrollmöglichkeiten für die Lehrkraft durch Kapiteltests, die einzeln mündlich oder in Gruppen schriftlich durchgeführt werden, versehen.

Leitprogramme sind nicht ...

... vorgesehen für Projektunterricht, wo die Ziele vorerst noch offen sind.

... Fallstudien. Die Fragestellungen sind in den Leitprogrammen meist abgeschlossen.

Absichten der ETH-Leitprogramme

- Sie bringen Abwechslung in den Unterrichtsstil.
- Sie reduzieren den Anteil an lehrerzentriertem Unterricht.
- Sie fördern die Eigenverantwortung der Lernenden für ihren Lernfortschritt.
- Sie bereiten auf die Universität vor (selbständiges Studium neben den Vorlesungen).
- Sie realisieren das "mastery learning": erst weiterfahren, wenn die Voraussetzungen sitzen.
- Sie liefern sorgfältige Formulierungen in kritischen Gebieten, z.B. in der Quantenphysik.
- Sie erlauben individuelles Lerntempo und individuellen Arbeitsort.
- Sie vermitteln den besonders Leistungsfähigen Anregungen durch den Stoff der Addita.

Leitprogramme aus der Sicht von Lehrerinnen und Lehrern ...

Eine erfreuliche Überraschung bei der Erprobung der ETH-Leitprogramme waren Berichte über neue, persönliche Kontakte: Bei den mündlich durchgeführten Kapiteltests, im Zusammenhang mit den Experimenten, nach der Lektüre in der Handbibliothek oder "einfach so". Viele Jugendliche wagten in diesen Situationen eher Fragen zu stellen. Nun hatten sie nicht mehr das Gefühl, bei ihnen falle der Groschen viel langsamer als bei allen andern der Klasse.

... und aus der Sicht von Schülerinnen und Schülern:

Vorteil von Leitprogrammen: Man muss nur soviel arbeiten, wie man will. - Nachteil von Leitprogrammen: Man sollte mehr arbeiten, als man will. (Rückmeldung eines Schülers)

Maturandinnen und Maturanden merken also die Absicht, dass sie mit den LPR als mündig betrachtet werden. Sie entdecken offensichtlich auch eigene Schwächen.

Generell sind die Urteile günstig: Beinahe alle wünschen sich ein bis zwei Leitprogramme pro Fach und Schuljahr. Negativ vermerkt wird vor allem die fehlende Kontaktperson für Fragen. **Z5.2**

Was macht der Lehrer, die Lehrerin, beim Arbeiten mit Leitprogrammen?

1) Vor dem Start

... gibt es eine Reihe von Vorbereitungsarbeiten:

- Vorkenntnisse abklären und nötigenfalls bereitstellen
- Experimentiermöglichkeiten abklären und ergänzen, Versuchsanleitungen anpassen
- Bücher für die Handbibliothek beschaffen
- Zeitlimiten und Notengebung bestimmen
- Arbeitsorte festlegen, allenfalls unter Mitwirkung des Rektorats (Versicherungsfrage)
- Leitprogramme, Arbeitsanweisungen usw. für SchülerInnen vervielfältigen
- Tests und Schlussprüfung vorbereiten, Räume und Zeitpunkte festlegen, eventuell einen Tutor oder eine Tutorin informieren und einarbeiten

2) Während der Leitprogrammphase...

... stehen Sie zwar nicht im Rampenlicht, sind aber trotzdem ausgelastet mit:

- Tests durchführen, korrigieren und rückmelden
- Einstellungen und Reparaturen bei Video und Experimenten
- Fragen von einzelnen Schülerinnen und Schülern beantworten

3) Nach Abschluss

- Fehler und Verbesserungsmöglichkeiten im Text vermerken
- Tabellen, Bücher, Experimente und andere Medien aufdatieren
- Neue Kapiteltests und Klausuren vorbereiten, weil eine gewisse Diffusion unvermeidlich ist.
  Lehrkräfte werden also nicht überflüssig...

Vorschläge zur Notengebung

Im Gegensatz zu Projekten und Fallstudien bildet die Benotung keinerlei Schwierigkeiten. Sie führen am Schluss der Unterrichtsphase, allenfalls nach einer Repetitionslektion, die gewohnte Klausur durch.

Das LPR kann schwache Charaktere zum Schlendrian verführen. Sie glauben, den ganzen Brocken erst für die Klausur sorgfältig lernen zu müssen. Dem kann man mit dem Verfahren entgegenwirken, auch die Kapiteltests zu bewerten. Realistisch wäre: Alle Tests zusammen zählen wie eine halbe Klausur.

Primär sind die Addita durch ihren Inhalt attraktiv. Ein Notenbonus für all diejenigen, die ein Additum vollständig durcharbeiten, stimuliert trotzdem. Es scheint legitim zu sein, diese Zusatzleistung dadurch zu honorieren, dass die Klausurnote um eine halbe Stufe angehoben wird.

Wieviel Leitprogramm-Unterricht?

Die Fachdidaktiker schlagen keine Revolution vor. Es gibt auch Hinweise auf Ermüdungserscheinungen. Aufgrund der Rückmeldungen scheinen ein bis zwei LPR pro Schuljahr ideal.

Wichtig ist ein schrittweiser Einstieg. Mit längeren Lernaufgaben lernen die Schülerinnen und Schüler das sorgfältige Lesen naturwissenschaftlicher Texte und das Arbeiten nach schriftlichen Anweisungen. Mit kürzeren Leitprogrammen gewöhnen sie sich an die neue Freiheit und die damit verbundene Verantwortung bei dieser Unterrichtsform.

Z6.1

Arbeitsblatt zu Kapitel 3

Aufgabe 3.8: "Auto im Kreisel"

1. Schritt: Übersicht

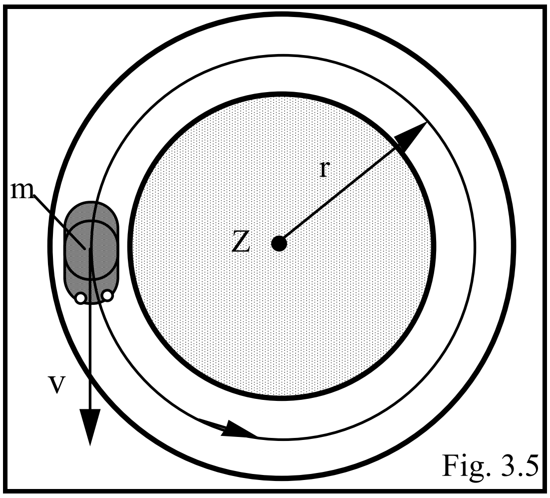


Fig. 3.5

Geg:

Ges:

2. Schritt: Kraftvektoren

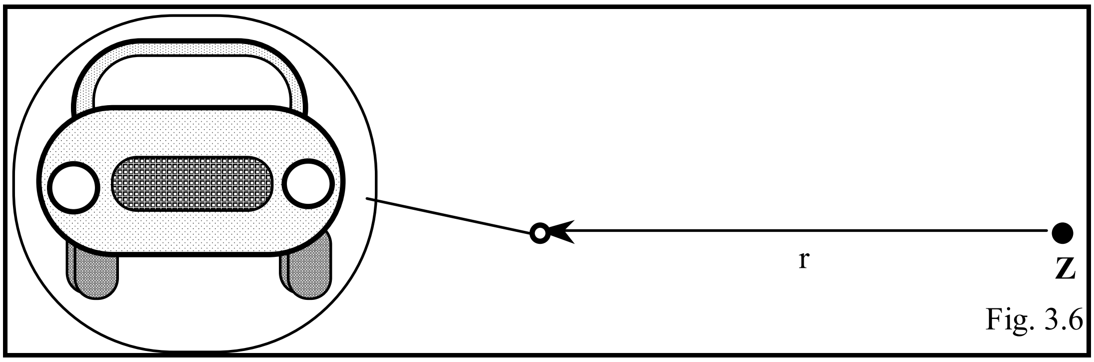


Fig. 3.6

3. Schritt: Beträge der Kräfte

4. Schritt: Verknüpfung und Lösung

Z7.1

Arbeitspass

	Termin	Test-Datum	Visum
Kapitel 1	....	....	....
Kapitel 2	....	....	....
Kapitel 3	....	....	....
Kapitel 4	....	....	....
Additum	....	....	....